This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 472372 DUPL

EX LIBRIS
GEORGE OWEN SQUIER

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM CIRCUMSPICE
Engineering
Library

From the library of
George O. Squier

Engin. Library
QA
805
.D47
v. 1

George O. Squier

COURS

DE

MÉCANIQUE

Madame veuve Despeyrous, propriétaire des Œuvres posthumes de son mari, et M. A. Hermann, éditeur, se réservent le droit de traduire ou de faire traduire cet Ouvrage en toutes langues. Ils poursuivront en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage (tome Ier) a été fait à Paris dans le courant du mois d'août 1884, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire de cet Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et débitants de ces exemplaires.

A. Hermann

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

COURS

DE

MÉCANIQUE

PAR

Th[illegible]

M. DESPEYROUS

ANCIEN PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

AVEC DES NOTES

PAR

M. G. DARBOUX

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A LA FAÇULTÉ DES SCIENCES.

TOME PREMIER

PARIS

A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE

8 — rue de la Sorbonne — 8

1884

Engineering Library
From the Library of
George Owen Squier
5-3-45

NOTICE

SUR LA VIE ET LES TRAVAUX

DE M. DESPEYROUS

Théodore Despeyrous est né à Beaumont-de-Lomagne (Tarn-et-Garonne) le 15 mai 1815.

Quatre mois après sa naissance il perdait son père. Il fut élevé par les soins de sa mère et de son frère Hippolyte, qui lui voua dès sa plus tendre enfance une affection sans limite. Il le plaça dans une pension d'Auvillars, petite ville du Tarn-et-Garonne, puis au collège de Lectoure et enfin en 1829 au lycée de Toulouse. Théodore Despeyrous se distingua dans tous ces établissements par son zèle ardent pour l'étude, et à l'âge de dix-sept ans il avait déjà le double titre de bachelier ès-lettres et ès-sciences.

A peine avait-il remporté ces succès universitaires qu'il était rappelé à Beaumont pour assister aux derniers moments de son frère. Ce fut pour lui une grande douleur que le temps ne put jamais affaiblir, car il avait pour son frère une affection sans borne. Théodore Despeyrous resta un an avec sa mère pour chercher à adoucir sa douleur. Sa mère voulait le retenir auprès d'elle, mais l'amour de la science l'emporta. Théodore Despeyrous partit pour Toulouse. Quoique bien jeune encore, il voulut se suffire à lui-même. Il entra comme professeur dans une institution qui existait naguère encore à Toulouse, l'institution Faget, et tout en faisant ses cours il poursuivit ses études scientifiques avec tant d'ardeur qu'en peu d'années il avait conquis tous les titres universitaires que la Faculté de Toulouse pouvait conférer. En 1840, il était licencié ès-sciences mathématiques; en 1841, docteur ès-sciences mathématiques; en 1842, licencié ès-sciences physiques.

En 1842, il se rendit à Paris pour suivre les cours de la Faculté des sciences. Un de ses amis le présenta à Considérant, qui était en relation avec les hommes les plus éminents de l'époque, littérateurs, musiciens, philosophes. C'était l'époque où florissaient les théories de Fourrier et de Saint-Simon. Jeune, ardent, Despeyrous se laissa aller comme tant d'autres aux idées nouvelles; il collabora même au journal *La Phalange* que publiaient les amis de Considérant.

Néanmoins l'étude des questions philosophiques et sociales ne faisait pas négliger à Despeyrous les mathématiques. A partir de 1844, il fréquenta moins assidûment les littérateurs et les philosophes et se lia avec quelques-uns des géomètres les plus éminents de l'époque, avec Sturm, Poinsot et Libri : Sturm surtout avait pour Despeyrous une estime et une affection toute particulière, ce fut lui qui le désigna au choix de ses collègues comme suppléant de M. Libri à la Faculté des sciences.

Dans l'intervalle, il avait été chargé en 1845 d'une mission à Vienne pour rechercher les manuscrits de Fermat, et c'est de là qu'il fut rappelé pour suppléer Libri à la Faculté des sciences. Pendant les années scolaires 1845-46 et 1846-47 il occupa la chaire de Libri. En 1848 il fut nommé professeur à la Faculté des sciences de Dijon et y resta dix-sept ans, jusqu'en 1865. « Son enseignement, remarquable par sa profondeur et sa clarté, n'épuisait pas son activité, dont la meilleure partie était réservée aux recherches scientifiques. Il publia de 1846 à 1862 vingt-quatre mémoires sur diverses parties des sciences mathématiques. De ces mémoires, les sept premiers sur les surfaces isothermes, l'attraction des ellipsoïdes, les fonctions elliptiques, les équations résolubles algébriquement, la théorie des permutations, ont pour objet les points les plus difficiles de l'analyse, et ont été honorés des plus hautes approbations. On y rencontre des propositions nouvelles et importantes, des idées générales et fécondes (1). » Ces travaux attirèrent l'attention du gouvernement. En 1862, Despeyrous fut nommé chevalier de la Légion d'honneur; en 1864 et 1865, il fut chargé de l'inspection générale des lycées et nommé membre du jury d'agrégation.

Désirant se rapprocher de son pays natal, Despeyrous fut appelé en 1866 à Toulouse comme professeur d'astronomie et directeur de l'Observatoire municipal. Il sut profiter de l'amitié que lui témoignait M. Leverrier pour transformer et pour ainsi dire renouveler l'Observatoire de Toulouse. Sentant que les ressources dont la municipalité de Toulouse pouvait disposer pour son Observatoire étaient trop faibles, il fit passer l'Observatoire entre les mains de l'État, et c'est depuis et grâce à M. Despeyrous que Toulouse possède un observatoire du premier ordre, dont elle a le droit d'être fière. A la même époque, Despeyrous abandonna la chaire d'astronomie pour la chaire de mécanique, devenue vacante par la retraite de M. Gascheau. Il a conservé cette chaire

(1) Extrait du rapport fait à l'Académie de Toulouse par M. Dumeril.

jusqu'en 1882. Pendant les seize années qu'il a passées à Toulouse, Despeyrous a donné à l'Académie des Sciences de Toulouse un grand nombre de mémoires, empreints tous d'une remarquable originalité et qui sont insérés dans ses recueils.

Éprouvé par de cruels malheurs de famille et surtout par la perte de son fils Anselme, ancien élève de l'École polytechnique, mort à vingt-trois ans à l'École d'application de Fontainebleau en 1879, « Despeyrous sollicita un congé, et puis exprima le vœu d'être mis à la retraite. On accéda à ce vœu avec peine, et, si je suis bien informé, sur la proposition de M. le Recteur et de M. le Doyen de la Faculté des sciences, M. le Ministre avait formé le projet de donner à M. Despeyrous un dernier témoignage de la haute estime où il tenait ses mérites et ses services, en lui faisant conférer par le président de la République la croix d'officier de la Légion d'honneur. Il eût fallu se hâter. La retraite de M. Despeyrous n'était pas encore liquidée, qu'au mois d'août dernier (6 août 1883) un accident de voiture mettait fin à la vie si bien remplie de M. Despeyrous [1]. »

Despeyrous a été avant tout et surtout un professeur éminent. Il était pour ses élèves d'une complaisance et d'une bienveillance sans borne. Travailleur infatigable, Despeyrous a traité un nombre très considérable de questions se rattachant aux sciences mathématiques. Il a publié un grand nombre de mémoires dans les journaux de Liouville et de Crelle, dans les mémoires des Académies de Dijon et de Toulouse. Enfin, il a légué à la bibliothèque de Beaumont-de-Lomagne un grand nombre de manuscrits sur la littérature et les sciences mathématiques, manuscrits d'une grande

[1] Extrait du rapport de M. Dumeril.

valeur et dignes d'être conservés précieusement, si nous nous en rapportons à la haute appréciation de M. le professeur Brassine.

Despeyrous n'était pas seulement un savant éminent, c'était encore une âme élevée et un homme de cœur. Des malheurs sans nom lui ayant ravi toutes les joies de la famille, il disait souvent : « Quand la famille vous abandonne, il faut aller à l'humanité et lui faire le plus de bien possible. » Animé de ces nobles sentiments, et pour honorer la mémoire de son cher fils Anselme, il a fait élever, à ses frais, sur la place nationale de Beaumont-de-Lomagne, une statue à Pierre Fermat, l'un des plus grands géomètres français, né aussi à Beaumont-de-Lomagne. Il a encore doté sa ville natale d'une bibliothèque populaire importante. Pour que l'œuvre qu'il avait fondée fût durable et que son entretien ne fût pas une charge pour la commune, M. Despeyrous a légué à la ville de Beaumont des revenus suffisants pour l'entretien du square où se trouve la statue de Fermat, et aussi pour l'achat de livres destinés à la bibliothèque. Il n'a pas non plus oublié ceux qui souffrent, les libéralités qu'il faisait de son vivant sont et seront continuées après sa mort, grâce aux donations qu'il a faites par testament à la Société philanthropique de Beaumont.

Tous ceux qui ont connu M. Despeyrous et surtout ses anciens élèves avaient pour lui autant d'affection que de respect. Aussi la nouvelle de sa mort fut-elle vivement ressentie, non seulement dans l'Université où il n'avait que des amis, mais surtout à Beaumont-de-Lomagne. Au milieu de tous les malheurs qui ont accablé la vie de M. Despeyrous, une seule consolation lui est restée : M. Despeyrous a rencontré une compagne capable de le comprendre et de partager ses vues élevées. Plus malheureuse encore que M. Despeyrous, puisqu'elle se survit pour ainsi dire à elle-même, après la perte de tous ceux qu'elle a aimés, Mme Despeyrous n'a cependant pas pensé qu'il lui suffisait de se renfermer dans sa douleur; elle a voulu honorer la mémoire de son mari en publiant une partie de ses œuvres. En agissant ainsi, elle ne rend pas seulement un pieux hommage à la mémoire d'un homme de bien, elle rend encore, je ne crains pas de le dire, un service considérable à la science et à l'enseignement.

A. HERMANN.

COURS
DE
MÉCANIQUE
DE Mr DESPEYROUS

INTRODUCTION

L'activité universelle exige que tous les corps de la nature soient en mouvement continu. On n'en conçoit pas moins la matière en repos absolu, et par suite en mouvement absolu. Pour le comprendre, il suffit d'admettre que trois axes de coordonnées rectangulaires ou obliques soient fixes, et alors un corps sera animé d'un mouvement absolu lorsque quelques-unes de ses coordonnées, par rapport aux trois axes, éprouveront avec le temps des variations de grandeur. Mais n'ayant aucun moyen de reconnaître des objets fixes, nous ne pouvons pas savoir si un corps est en mouvement absolu. Tout ce que nous pouvons affirmer, c'est que si la position relative de plusieurs points ou corps n'est pas restée la même, il y a un certain nombre d'entre eux dont la position absolue a changé.

Lorsque plusieurs objets conservent la même position relative, on est naturellement porté à les juger en repos; et si l'un d'eux vient à se déplacer par rapport au système, c'est à lui qu'on attribue le mouvement. C'est ainsi qu'on a cru longtemps la terre immobile dans l'espace. Une étude approfondie a fait voir, au contraire, que la terre était en mouvement continu; en sorte que tous les corps placés à sa surface et conservant leur position relative, sont en repos relatif, et les corps, dont la position change à chaque instant par rapport aux premiers, sont animés d'un mouvement relatif.

Principe de l'inertie. — Le principe le plus simple à admettre consiste à dépouiller la *molécule* [1] du pouvoir de modifier en aucune manière l'état où elle se trouve; si elle est en repos, elle y demeurera éternellement si aucune cause n'agit sur elle; si elle est en mouvement, elle persévèrera dans ce mouvement. Ce principe porte le nom de *principe de l'inertie.*

Définition de la force. — Si l'état d'un corps, sa manière d'être, viennent à être modifiés, il faut attribuer ce changement à un être distinct dont le caractère spécifique est différent de celui de la molécule. Quelle que soit sa nature, il faut à cette sorte d'agent donner un nom; on le désigne par celui de *force* ou *puissance.*

Définition de la Mécanique. — En face des phénomènes naturels, l'homme doit les comparer, les mesurer si c'est possible, afin d'arriver à la connaissance des lois qui les

[1] Nous avons appliqué le principe de l'inertie à la molécule seulement, parce que l'ensemble des phénomènes naturels montre que les forces qui les produisent proviennent le plus souvent de l'action des corps les uns sur les autres. En sorte que la molécule ne trouve jamais en elle-même la cause de la modification de son état, mais peut la trouver dans l'existence d'autres points matériels ou molécules. Ce principe ainsi compris doit aujourd'hui être considéré comme vrai par l'accord de ses conséquences, même les plus éloignées, avec l'observation.

régissent. Mais auparavant, il faut établir la *Mécanique rationnelle*.

La *Mécanique rationnelle* est la science qui, prenant pour bases des données expérimentales en nombre suffisant, permet de trouver suivant quelles lois des forces données concourent à produire un phénomène, et réciproquement.

Données expérimentales nécessaires à la Mécanique. — Les données expérimentales dont la Mécanique se sert sont au nombre de trois : le principe de l'*inertie,* le principe des *mouvements relatifs* et le principe de l'*action égale et contraire* à la réaction. Nous avons déjà défini le premier principe, nous définirons plus tard les deux autres. Ces trois principes admis, toutes les autres vérités de la Mécanique s'en déduisent à l'aide de l'analyse et de la synthèse.

Divisions de la Mécanique. — Nous avons déjà donné une définition de la Mécanique; on peut dire encore que la Mécanique est la science des *forces* et du *mouvement.* Cette science se divise en plusieurs branches, comme nous allons le montrer.

Cinématique. — On peut d'abord étudier le mouvement au point de vue purement géométrique, abstraction faite des causes qui le produisent ou le modifient, c'est à dire sans s'occuper des *forces;* dans cette étude, il n'y a pas lieu de considérer la nature dont les corps sont formés; on peut les réduire à leurs éléments géométriques; cette branche de la mécanique a reçu le nom de *Cinématique.* On considère déjà des mouvements en géométrie, c'est en faisant mouvoir des lignes qu'on engendre des surfaces; mais en géométrie, on ne s'occupe que des positions successives occupées par ces lignes, et non du temps qu'elles mettent à passer d'une de ces positions à une autre; dans la *cinématique,* l'idée de temps se joint à celle des déplacements des corps que l'on considère.

Dynamique, son but. — Quand, aux idées de déplacement et de temps, on joint l'idée de *force,* on entre dans une autre branche de la Mécanique, qui porte le nom de *Dynamique.* La *dynamique* s'occupe principalement du problème suivant : un corps ou système de corps étant sollicités par des forces données, trouver le mouvement que ces corps prendront dans l'espace, et réciproquement.

Statique. — Quelle relation doit-il y avoir entre les forces qui agissent sur un système de corps, pour que ces corps prennent dans l'espace un mouvement donné?

Pour résoudre ce problème général, on commence par s'occuper du cas particulier où l'on se proposerait de trouver les relations des *forces,* pour que le système de corps auxquels elles sont appliquées prenne un mouvement nul, c'est à dire demeure en équilibre. On obtient ainsi une nouvelle division de la Mécanique : la *Statique,* qui est la science de l'équilibre des *forces.* D'Alembert a montré que le problème de l'équilibre une fois résolu, on peut y ramener le problème général qui fait l'objet de la *dynamique.* Voilà pourquoi on fait généralement précéder l'étude de la *dynamique* par celle de la *statique.*

Il convient de remarquer que, dans la *statique,* il n'est pas nécessaire de connaître les mouvements que les *forces* seraient capables d'imprimer à leurs points d'application, si ces points étaient libres de céder à leur action; il suffit de considérer les *forces* comme des grandeurs homogènes, comparables entre elles, et de déterminer les rapports qu'elles doivent avoir entre elles pour qu'elles se détruisent mutuellement. Quand on passera de l'étude de l'équilibre à celle du mouvement, il faudra de nouveaux principes pour établir la relation entre la cause et l'effet, la force et le mouvement. A ce point de vue, la *statique* est plus simple que la *dynamique*. C'est donc une nouvelle raison pour faire précéder l'étude de la *dynamique* par celle de la *statique*. Nous suivrons ainsi l'ordre chronologique des découvertes de la science; Archimède avait en effet posé les bases de la *statique*, et ce n'est que dix-huit siècles après lui que la *dynamique* commence avec Galilée.

Mécanique rationnelle, Mécanique appliquée. — Nous avons donc trois grandes divisions de la Mécanique. Ces trois parties constituent la mécanique *rationnelle;* nous disons *rationnelle,* parce que les spéculations de la Mécanique ne s'appliquent immédiatement qu'à des êtres de raison, que conçoit notre esprit, mais qui n'existent pas réellement dans la nature. Si nous voulions tenir compte tout d'abord de toutes les propriétés des corps, le moindre problème de mécanique présenterait une complication extrême; nous imaginerons des corps fictifs doués de propriétés que nous leur attribuerons, de manière à simplifier la question, tout en nous écartant le moins possible des propriétés que l'observation nous aura révélées dans les corps naturels; c'est ainsi que nous considérerons les corps solides comme infiniment durs et rigides, quelles que soient les pressions auxquelles on les soumette; les cordes comme parfaitement flexibles et inextensibles, etc., toutes choses qui n'ont pas lieu réellement. C'est à ces corps hypothétiques, bien définis, que nous appliquerons le calcul; la solution ainsi obtenue ne sera évidemment pas la solution rigoureuse du problème que nous avions à résoudre, puisque nous avons supposé les corps différents de ce qu'ils sont dans la nature; mais du moins elle n'en différera pas beaucoup; ce sera une première approximation. Il faudra ensuite corriger cette solution, en évaluant numériquement les petites erreurs qui proviennent de l'inexactitude des hypothèses fondamentales; c'est l'objet de la Mécanique dite *appliquée,* par opposition à la Mécanique *rationnelle.* Nous ne nous occuperons pas dans ce Cours de la Mécanique appliquée, qui a pris aujourd'hui un grand développement et qui rend d'immenses services à l'industrie.

PREMIÈRE PARTIE

STATIQUE

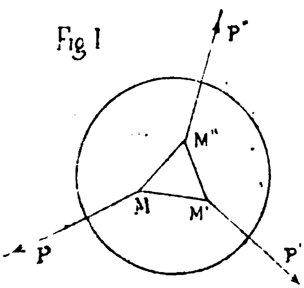
CHAPITRE PREMIER

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES

Conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un même point. Théorème des moments.

1. Nous devons procéder à la recherche des conditions d'équilibre d'un corps quelconque, de figure invariable, sollicité par des forces quelconques P, P′, P″... appliquées en des points donnés M, M′, M″... du corps. Nous supposerons d'abord le corps dénué de pesanteur; dans la suite nous tiendrons compte de la pesanteur en ajoutant de nouvelles forces, que nous apprendrons à déterminer, aux forces données P, P′, P″... pour avoir l'équilibre. Il est aisé de voir qu'il suffira de trouver les conditions de l'équilibre pour le simple système de points M, M′, M″... regardés comme un assemblage de points liés entre eux d'une manière invariable; car si les forces se font équilibre sur le système M, M′, M″..., l'équilibre aura lieu évidemment si on englobe ces points dans la matière du corps.

Fig 1

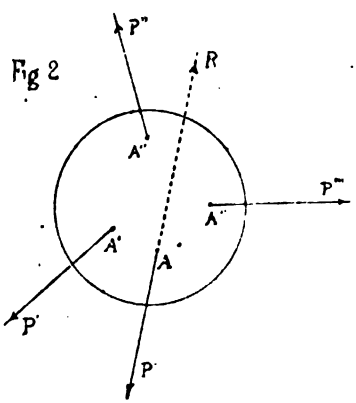


2. Puisqu'il ne reste plus à considérer, dans l'équilibre des forces, que trois choses : leurs intensités, leurs directions et leurs points d'application, il est visible que les conditions d'équilibre ne peuvent être que les relations qui existent entre ces trois choses, pour que l'équilibre ait lieu. On comprend que ces relations pourront être exprimées par des équations où l'on fera entrer : les intensités des forces, leurs directions par les angles que fait chacune d'elles avec trois axes fixes Ox, Oy, Oz, et leurs points d'application par leurs coordonnées x, y, z, rapportées aux mêmes axes. Nous pouvons donc nous faire une idée du problème de la *Statique*.

3. Il est vrai que, jusqu'ici, nous avons supposé le corps entièrement libre; il pourra se faire qu'il soit assujéti à remplir certaines conditions, comme de tourner autour d'un point fixe, ou d'une droite fixe, ou de toucher sans cesse un corps donné, etc... Mais on verra plus tard que les résistances qu'un corps éprouve par suite de ces conditions, peuvent toujours être remplacées par des forces convenables; en sorte qu'après avoir introduit ces forces et les avoir jointes aux autres, le corps pourra être considéré comme tout à fait libre dans l'espace.

4. Notion de la résultante. — Pour découvrir la route qui peut nous conduire aux conditions de l'équilibre, considérons un corps tenu en équilibre par des *forces* P, P′, P″... appliquées aux points A, A′, A″... du corps; je dis que toutes ces *forces*, sauf une, peuvent être remplacées par une *force* unique produisant exactement le même effet. Par exemple, les *forces* P′, P″, P‴, peuvent être remplacées par la *force* AR égale et opposée à la *force* AP.

Fig 2



En effet les *forces* égales et opposées AR et AP se détruisent; on peut donc regarder le corps comme n'étant plus soumis qu'à l'action des *forces* P', P'', P'''; mais, d'un autre côté, la *force* P faisant équilibre à elle seule aux *forces* P', P'' P'''... toutes ces forces se détruisent, et on peut regarder le corps comme n'étant plus soumis qu'à l'action de la *force* R. L'état du corps est donc identiquement le même, soit qu'on le suppose sollicité par les *forces* P', P'', P'''..., soit qu'on le suppose sollicité uniquement par la *force* R égale et contraire à P.

5. Donc, puisqu'il peut arriver qu'une seule force soit capable de produire sur un corps le même effet que plusieurs, et en tienne parfaitement lieu, notre premier soin doit être de chercher à réduire les *forces* appliquées au plus petit nombre possible, et surtout d'observer la loi de cette réduction. Alors les conditions d'équilibre entre toutes les *forces,* se ramèneront aux conditions d'équilibre entre ces *forces finales,* équivalentes aux premières, et deviendront plus faciles à exprimer.

6. Définition de la résultante. — Cette *force,* qui est capable de produire sur un corps le même effet que plusieurs *forces* combinées, et qui, à elle seule, peut en tenir parfaitement lieu, se nomme leur ***résultante.*** On sait, d'après ce qui précède, que : si plusieurs *forces* se font équilibre sur un corps, l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la ***résultante*** de toutes les autres.

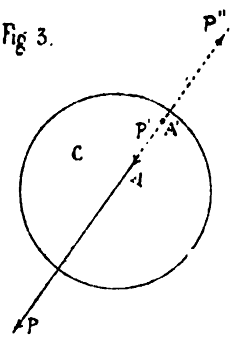
Composantes. — Les autres *forces* à l'égard de la ***résultante*** se nomment les ***composantes.*** Le problème qui a pour objet de trouver la ***résultante*** de plusieurs *forces* se nomme : la ***composition des forces.*** Nous sommes donc amenés à l'étude de la ***composition des forces.*** Avant d'aborder cette étude, nous démontrerons quelques lemmes dont nous ferons un usage très fréquent.

Il est évident, comme nous l'avons déjà dit, que : deux *forces* égales et contraires appliquées à un même point sont en équilibre.

Il est encore évident que : deux *forces,* égales et contraires, appliquées aux extrémités d'une droite de longueur invariable, et agissant dans la direction de cette droite, sont en équilibre; car il n'y a pas de raison pour que, de l'action des deux forces, il résulte un mouvement d'un côté plutôt que de l'autre.

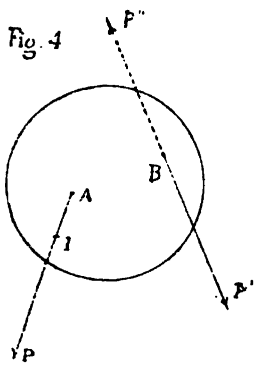
7. Translation du point d'application. — Il est facile de conclure de là que : l'effet d'une *force* qui sollicite un corps ne change pas si le point d'application de la *force* est transporté en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce nouveau point soit invariablement lié au premier. Soit en effet la *force* P appliquée en un point A du corps C; soit A′ un point quelconque de la direction de cette force; en A′ j'applique deux forces égales et contraires à P, agissant suivant la droite AA′. Les forces P′ et P″ se détruisent, et il en est de même de P et P″; donc le corps sera dans le même état, soit qu'il soit sollicité par la force P ou bien par P′; la proposition est donc démontrée.

Fig 3.



8. Remarque I. — On peut se demander si l'on obtient bien toutes les forces capables de produire le même effet sur le corps, en transportant ainsi la force P en un point quelconque de sa direction. Supposons que la force BP′ produise sur le corps C un effet identique à celui de la force AP; soit BP″ une force égale et contraire à BP′; cette force BP″ maintenant BP′ en équilibre, devra faire aussi équilibre à AP; ainsi les deux forces AP et BP' devront se faire équilibre sur le corps C; si l'équilibre existe, on ne le troublera pas en rendant fixe un point I de AP; nous aurons alors le corps C mobile autour du point I, qui sera en équilibre sous l'action des forces AP et BP'; mais la force AP est détruite par le point fixe; il ne reste plus que la force BP'; nous admettrons comme évident que, pour qu'un corps qui peut tourner librement autour d'un point fixe, et qui est sollicité par une force unique, soit en équilibre, il faut et il suffit que la direction de cette *force* passe par le point fixe. La force BP' devra donc passer par le point I, et comme ce point est un point quelconque de AP, on voit que les droites BP' et AP doivent coïncider; on voit ensuite directement que ces forces doivent avoir la même intensité et agir en sens contraires. Donc la *force* BP' n'est autre chose que la *force* AP transportée en un point quelconque de sa direction.

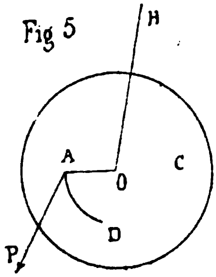
Fig. 4



On déduit de là cette proposition importante : *Si des forces appliquées à un corps libre ont une résultante, cette résultante est unique.* En effet, une seconde *résultante,* si elle existait, devrait produire le même effet que la première; donc on l'obtiendra en transportant la première en un point quelconque de sa direction; ce n'est autre chose que la première résultante.

9. Remarque II. — Revenons un moment sur la proposition admise tout à l'heure; soit le corps C mobile autour du point fixe O, et sollicité par la force P; il est évident que l'équilibre a lieu, si la direction de P passe par le point O, car on pourra la concevoir appliquée au point fixe lui-même, et là elle ne pourra produire aucun effet, elle sera détruite; on peut admettre que si sa direction ne passe pas par le point fixe, elle mettra le corps en mouvement; mais on peut rendre plus sensible l'évidence de la dernière partie de cette proposition, en raisonnant comme il suit : Supposons que la force ne produise pas le mouvement, que l'équilibre ait lieu; abaissons du point O la perpendiculaire OA sur la direction de la *force*, et menons la droite OH perpendiculaire au plan OAP; si le corps est en équilibre, il y restera *à fortiori* si nous l'attachons à l'axe OH, en ne lui permettant pas de pirouetter en tous sens autour du point O, mais seulement de tourner autour de l'axe OH; mais dès lors il est évident que la *force* AP va produire le mouvement, et que le point A décrira l'arc de cercle AD décrit du point O comme centre, avec OA comme rayon, dans le plan AOP.

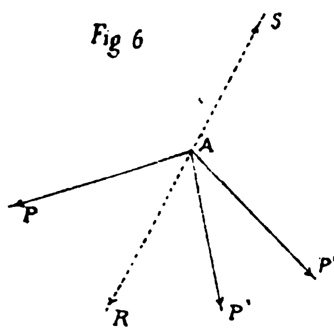
Fig 5



10. Des forces appliquées à un même point ont toujours une résultante. — Nous avons dit que, quand plusieurs forces sont appliquées à un corps, il y a grand intérêt à les réduire au plus petit nombre possible; mais il faut se garder de croire que tout système de forces appliquées à un corps solide admette une *résultante* unique. Nous allons considérer un cas où cette *résultante* existe toujours : c'est celui d'un nombre quelconque de *forces* appliquées à un même point.

Soient les *forces* P, P′, P″... en nombre quelconque, situées ou non dans un même plan, et appliquées au même point A; je dis que si elles ne se font pas équilibre, elles ont une *résultante* unique. En effet, si ces *forces* ne se font pas équilibre, elles tendront à faire mouvoir le point A, suivant une certaine direction AR; soit AS le prolongement de AR, il est évident qu'en appliquant au point A une *force* convenable S dirigée suivant AS, on l'empêchera de se mouvoir; le point A sera donc en équilibre sous l'influence des forces S, P, P′, P″... D'après un théorème démontré plus haut (4), les *forces* P, P′, P″... auront une résultante AR égale et contraire à AS. Nous allons indiquer les moyens de trouver la grandeur et la direction de cette ***résultante;*** c'est à dire que nous allons faire la ***composition des forces*** appliquées à un même point.

Fig 6



11. Composition des forces agissant suivant la même droite. — Il est un cas où la solution est immédiate : c'est celui où les *forces* agissent suivant la même droite. Plaçons-nous dans cette hypothèse, et supposons d'abord qu'il y ait seulement deux forces P et Q agissant dans le même sens; nous admettrons comme un axiome que ces deux *forces* s'ajoutent, et donnent une résultante égale à leur somme $P + Q$. Si les deux forces agissent en sens contraire, soit $P > Q$, on pourra considérer la force P comme la résultante de deux autres de même sens $P - Q$ et Q; cette dernière détruira la seconde force donnée, et il ne restera plus que $P - Q$, qui sera la résultante. Ainsi, quand deux *forces* inégales et de sens contraires agissent suivant la même droite, elles ont une ***résultante*** égale à leur différence, qui agit dans le sens de la plus grande. On tire de là cette proposition générale : La ***résultante*** d'un nombre quelconque de *forces* appliquées au même point, suivant la même droite, est égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens, sur la somme des forces qui agissent en sens contraire, et agit dans le sens de la plus grande somme.

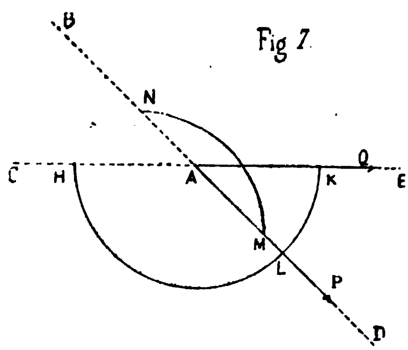
En convenant de donner le signe + aux forces qui agissent dans un sens, et le signe — aux forces qui agissent en sens contraire, on peut dire encore que la *résultante* est égale à la somme algébrique des *composantes.*

Revenons au cas général de la composition d'un nombre quelconque de *forces* concourantes ; il est visible qu'il suffit de résoudre la question dans le cas de deux forces, car si l'on en a plus de deux, il suffira de composer les deux premières, ce qui donnera une *résultante* que l'on composera avec la troisième, etc.

Composition de deux forces appliquées à un même point.

12. La résultante est dirigée dans le plan et dans l'angle des deux forces. — Soient les deux forces P et Q appliquées au point A ; nous savons que ces deux forces ont une *résultante;* il est évident que cette *résultante* doit être dans le plan PAQ ; car il n'y a pas de raison pour qu'elle soit située d'un côté du plan plutôt que d'un autre ; on peut voir de plus qu'elle doit être comprise dans l'angle PAQ. En effet, si la *force* P existait seule, elle ferait mouvoir le point A suivant la droite AD ; mais la force Q intervenant, tend à entraîner le point A dans la région du plan située du même côté de AP que AQ, c'est à dire dans la région MN ; de même si la force Q existait seule, elle déplacerait le point A suivant la droite AE ; mais la force P intervenant, tend à entraîner le mobile dans la région du plan située du même côté de AQ que AP, c'est à dire dans la région HK ; ces deux régions ont une partie

Fig 7

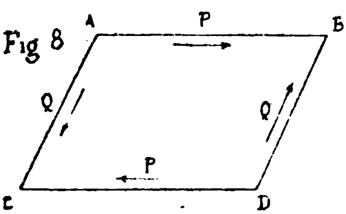


commune KL dans laquelle se mouvra le point A; ainsi, ce point se mouvra dans l'angle PAQ; donc, la *résultante* est située dans cet angle. Mais quelle sera, dans l'angle, la direction de la résultante? On ne l'aperçoit immédiatement que si les deux *forces* sont égales.

Car, alors, il n'y a pas de raison pour que la *résultante* s'incline plus sur l'une des *forces* que sur l'autre, elle est donc dirigée suivant la bissectrice de l'angle PAQ. Pour résoudre la question générale, nous démontrerons d'abord le *lemme* suivant :

13. Lemme. — *Soit un parallélogramme* ABCD, *que nous supposerons solide, de manière que les longueurs de ses côtés et ses angles soient invariables; nous supposons les côtés* AB *et* AC *commensurables; nous appliquons au sommet* A *deux forces* P *et* Q *dirigées respectivement suivant* AB *et* AC, *et représentées pour leurs intensités par* AB *et* AC; *nous appliquons de même au sommet* D *deux forces égales, respectivement aux précédentes, et dirigées suivant* DC *et* DB; *je dis que ce parallélogramme sera en équilibre sous l'action des quatre forces.*

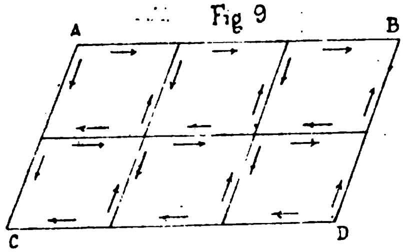
Fig 8



Si le parallélogramme est un losange, AB = AC, P = Q; la diagonale AD est la bissectrice des angles A et D; la résultante de deux forces appliquées en A est dirigée suivant AD; la résultante des deux forces appliquées en D est dirigée suivant DA; elle est évidemment égale à la résultante précédente; elle agit suivant la même droite et en sens contraire; donc l'équilibre a lieu et le théorème est démontré dans ce cas particulier.

Revenons au cas général, et supposons que AB et AC soient dans le rapport des entiers 3 et 2 par exemple; divisons AB en trois parties égales, et par les points de division, menons des parallèles à AC. Divisons de même AC en deux parties égales, et par le point de division, menons une parallèle à AB; nous formerons ainsi des losanges à chacun desquels nous appliquerons quatre forces, comme tout à l'heure. Chacun de ces losanges sera en équilibre; il en sera de même de leur ensemble; les forces intermédiaires se détruisent deux à deux, et il reste les forces AB, AC, DC et DB qui se font équilibre; ce qu'il fallait démontrer.

Fig 9



Ainsi, le parallélogramme ABCD est bien en équilibre sous l'influence des quatre forces qui lui sont appliquées; les deux forces P et Q appliquées en A ont une résultante R appliquée au point A; c'est celle que nous cherchons; les deux autres forces appliquées en D ont une résultante R′ appliquée à ce point D; le parallélogramme est donc en équilibre sous l'action des forces R et R′; les deux forces doivent agir suivant la même droite; donc la résultante R passe au point D; elle est donc dirigée suivant AD; ainsi : *La résultante de deux forces* P *et* Q *appliquées au point* A *est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.*

Il est vrai que ce théorème n'est démontré que dans le cas où les deux forces P et Q sont commensurables. Nous allons l'étendre au cas où les forces P et Q sont incommensurables.

14. Lemme. — *Je suppose qu'on ait composé les forces* AP *et* AQ, *ce qui a donné la résultante* AR; *je dis que si l'on augmente la force* P *de* P′, *la résultante va se rapprocher* *de* AP. En effet, il faudra composer AR avec AP'. On voit de même que si l'on diminue AP de P'', la résultante se rapprochera de AQ.

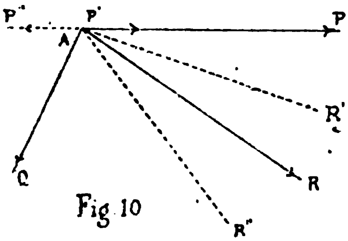


Fig. 10

Cela posé, partageons Q en n parties égales, n étant très grand; posons :

$$Q = np,$$

on aura :

$$mp < P < (m + 1)p,$$

m étant aussi très grand.

$$\text{Soit } AB' = mp, \quad AB'' = (m + 1)p,$$

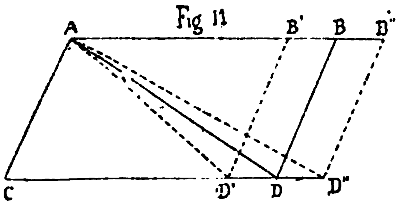


Fig. 11

on aura par le théorème précédent, AD' comme résultante de $Q = np$ et mp; AD'' comme résultante de $Q = np$ et $(m + 1)p$.

$P > mp$, donc la résultante de P et Q est entre AD' et AB; $P < (m + 1)p$; donc la résultante de P et Q est entre AD'' et AC; elle tombe donc dans l'angle D'AD''; or :

$$B'B'' = D'D'' = (m + 1)p - mp = p,$$

D'D'' peut être rendu aussi petit que l'on voudra, en augmentant n; donc la résultante sera comprise entre deux droites AD' et AD'' qui se rapprochent indéfiniment de AD; donc la résultante est dirigée suivant AD, diagonale du parallélogramme construit sur P et Q.

15. Je dis maintenant que : *La résultante est représentée aussi en grandeur par la diagonale du parallélogramme construit sur les forces.*

En effet, prolongeons AD en AE et portons sur cette droite une longueur égale à la grandeur inconnue de la résultante; les trois forces AB, AC, AE vont se faire équilibre sur le point A; donc AB sera égal et opposé à la résultante de AE et AC; or, si nous achevons le parallélogramme ACEF, la résultante de AE et AC sera dirigée suivant la diagonale AF; donc AF est le prolongement de AB et la figure ADCF est aussi un parallélogramme; on conclut de ce qui précède :

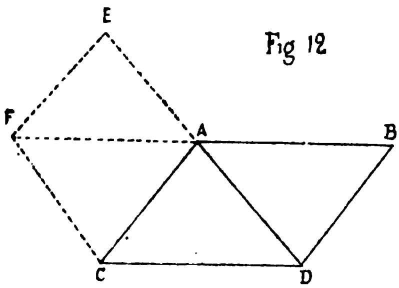


Fig 12

$$EF = AC; \quad AF = CD; \quad AFE = ACD.$$

Donc les triangles AEF et ADC sont égaux, et $AE = AD$; la résultante est donc bien représentée par AD. Nous pouvons donc énoncer le théorème complet du parallélogramme des forces :

La résultante de deux forces quelconques appliquées à un même point est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes qui représentent ces forces en grandeur et en direction.

16. Remarque. — On voit que deux forces qui agissent sur un même point ne peuvent avoir une résultante nulle ou se faire équilibre que si elles sont égales ou directement opposées, car, s'il n'en est pas ainsi, la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces ne pourra être nulle.

17. Relations entre la résultante et les composantes. — Le triangle ADC comprend tous les éléments qui se rapportent aux intensités et aux directions des deux composantes P et Q et de leur résultante R ; les intensités de ces forces sont représentées en effet par les côtés de ces triangles, et les angles A, D et C du triangle sont égaux aux angles de Q avec R, de P avec R, et au supplément de P avec Q. Si donc on donne trois de ces éléments, on pourra déterminer les trois autres par les formules de la trigonométrie, pourvu que parmi les trois données il entre au moins la grandeur d'une force. Les formules trigonométriques nous donnent :

$$\frac{P}{\sin (Q, R)} = \frac{Q}{\sin (P, R)} = \frac{R}{\sin (P, Q)};$$

donc : *chacune des forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.* On a aussi :

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\, PQ \cos (P, Q),$$

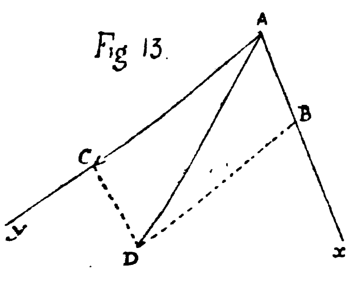
et cette équation fournira la valeur de la résultante, quand on donnera en nombre les grandeurs des composantes et l'angle qu'elles font entre elles.

Si $P = Q$, on a :

$$R = 2\, P \cos \tfrac{1}{2} (P, Q).$$

Décomposition d'une force en deux autres de directions données. — Réciproquement, une force R étant donnée, on pourra toujours la décomposer en deux autres appliquées au même point, suivant des directions données Ax, Ay, pourvu qu'elles soient dans un même plan avec la force R, on aura :

Fig 13.



$$P = \frac{R \sin (Q, R)}{\sin (P, Q)}; \qquad Q = \frac{R \sin (P, R)}{\sin (P, Q)}.$$

Si les directions données sont rectangulaires, on a :

$$P = R \cos (P, R), \quad Q = R \cos (Q, R), \quad R^2 = P^2 + Q^2.$$

Chaque composante est égale à la projection de la résultante sur sa propre direction; c'est ce qu'on nomme la *force estimée* suivant cette direction.

18. Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point. — Polygone des forces. — En réduisant la construction à sa partie essentielle, on voit que si l'on décrit un contour polygonal dont les côtés successifs soient parallèles aux directions des forces données et égaux aux longueurs qui représentent les intensités de ces forces, la droite qui fermera le contour représentera en grandeur et en direction la résultante cherchée. Si le polygone se ferme de lui-même, les forces se feront équilibre, et réciproquement.

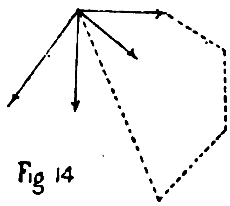
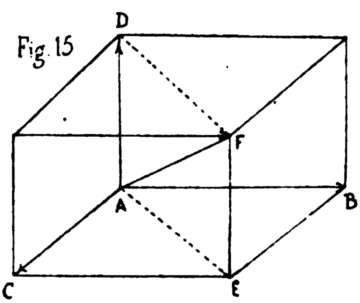


Fig 14

19. Cas de trois forces. — Parallélipipède des forces. THÉORÈME. — *Si trois forces* X, Y, Z, *appliquées à un même point de l'espace, sont représentées par les trois lignes* AB, AC, AD, *et que l'on construise le parallélipipède dont ces trois lignes sont trois arêtes contiguës, la résultante* R *de ces trois forces sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélipipède.* En effet, la résultante de AB et AC est AE, et la figure AEFD étant un parallélogramme, la résultante de AE et AD est bien la diagonale AF du parallélipipède.

Fig. 15



Remarquons que tant que les trois forces X, Y, Z ne seront pas dans un même plan, elles ne pourront jamais donner une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles elles-mêmes en particulier.

20. Équilibre de trois forces concourantes. — Les forces AB, AC, AD doivent se faire équilibre; donc AB est égal et directement opposé à la résultante de AC et AD; donc les trois forces sont dans un même plan. On devra avoir :

$$(1) \qquad \frac{X}{\sin(Y, Z)} = \frac{Y}{\sin(X, Z)} = \frac{Z}{\sin(X, Y)}.$$

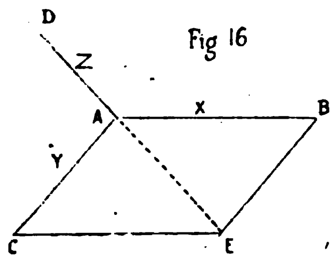


Fig 16

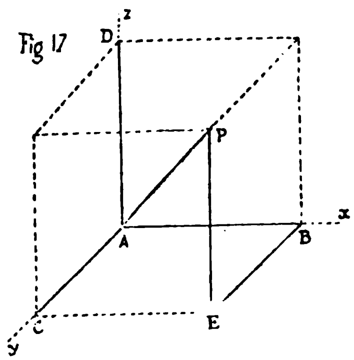
Ainsi, pour que trois forces appliquées à un même point se fassent équilibre, il faut que les trois forces soient situées dans un même plan, et que chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.

Ces conditions sont suffisantes, pourvu qu'il soit entendu que l'une des forces tire en dehors de l'angle formé par les deux autres. Car si l'on se donne arbitrairement X et Y, les équations (1) donneront la force AE, diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces, ou son opposée AD, il faudra prendre AD, et alors l'équilibre a bien lieu.

21. Décomposition d'une force en trois autres de directions données. — Une force quelconque R étant donnée, on pourra toujours la décomposer en trois forces X, Y, Z, appliquées au point A et agissant suivant trois directions données Ax, Ay, Az, pourvu qu'elles ne soient pas toutes *trois* comprises dans un même plan.

En effet, soit AP la ligne qui représente en grandeur et en direction la force R; menons PE parallèle à Az, jusqu'à la rencontre du plan xAy, EB parallèle à Ay jusqu'à la rencontre de Ax, on formera le contour polygonal ABEP, dont les côtés AB, BE, EP représentent les composantes cherchées; pour les avoir en position, il suffit d'achever le parallélipipède.

Fig 17



Cherchons les intensités des composantes, dans le cas où les trois directions données sont rectangulaires.

Soient α, β, γ les angles que fait la force donnée R avec les trois axes. On aura, comme AB, AC, AD sont les projections octogonales de AP sur les trois axes,

$$(1) \qquad X = R\cos\alpha, \quad Y = R\cos\beta, \quad Z = R\cos\gamma.$$

Ces équations font connaitre immédiatement les composantes X, Y, Z, quand R, α, β, γ sont connus, en joignant à ces équations la relation connue :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

On aura en effet :

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Les formules (1) sont générales, pourvu que, regardant comme positives les forces qui tirent le point A dans le sens des coordonnées positives, et par suite comme négatives celles qui tirent en sens contraire, on prenne pour α, β, γ les angles que fait la direction de la résultante avec les parties positives des axes Ax, Ay, Az.

En effet, on voit, en se rapportant à la règle du parallélipipède que si, par l'extrémité de la résultante on mène un plan perpendiculaire sur Ax, ce plan coupera Ax en un point B qui sera l'extrémité de la force X ; on aura toujours en valeur absolue $X = R \cos \alpha$; il reste à montrer que cela a lieu aussi en tenant compte du signe ; or, si α est aigu, le point B tombe sur Ax, et X est positif ; si α est obtus, le point B tombe sur le prolongement de Ax, et X est négatif. Les formules (1) sont donc générales, en admettant nos conventions.

22. Calcul de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point. — On ramène au cas de trois forces rectangulaires la composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point A ; menons par ce point trois axes rectangulaires Ax, Ay, Az ; soient α, β, γ ; α', β', γ' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$... les angles que font avec les axes les directions des forces AP, AP′, AP″..., la force P est décomposable en trois autres dirigées suivant Ax, Ay, Az, et égales respectivement en grandeur et en signe à $P \cos \alpha$, $P \cos \beta$, $P \cos \gamma$. Il en est de même des autres forces. On pourra composer en une seule force X toutes les forces dirigées suivant Ax, en une seule force Y toutes les forces dirigées suivant Ay, et en une seule force Z toutes les forces dirigées suivant Az. On aura alors les expressions suivantes :

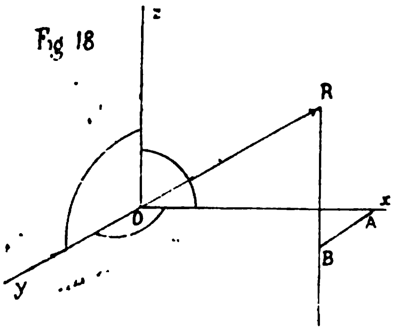
$$X = P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' \ldots = \sum P \cos \alpha,$$
$$Y = \sum P \cos \beta,$$
$$Z = \sum P \cos \gamma.$$

La question est donc ramenée à une question déjà résolue ; la composition de trois forces concourantes appliquées à un même point. Si on appelle R la résultante ; a, b, c les angles qu'elle fait avec les axes ; on aura :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

23. Cherchons l'expression de R dans le cas des axes obliques.

Fig 18



Appelons :

$(x, y) = \nu \quad (x, z) = \mu \quad (y, z) = \lambda$

et désignons encore par a, b, c les angles de R avec : Ox, Oy, Oz.

En projetant successivement sur Ox, Oy, Oz le contour OABR ou OR, on aura :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} R \cos a = X + Y \cos \nu + Z \cos \mu, \\ R \cos b = X \cos \nu + Y + Z \cos \lambda, \\ R \cos c = X \cos \mu + Y \cos \lambda + Z. \end{array} \right.$$

En projetant sur OR le contour OABR, on a :

$$(2) \quad R = X \cos a + Y \cos b + Z \cos c.$$

En multipliant les équations (1) respectivement par X, Y, Z, ajoutant et tenant compte de (2), on a :

$$(3) \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\,XY \cos \nu + 2\,YZ \cos \lambda + 2\,XZ \cos \mu.$$

Les équations (1) et (3) feront connaître R et a, b, c.

On peut donner une autre forme à l'expression de R. Revenons au cas des axes rectangulaires, auquel cas $\cos \lambda$, $\cos \mu$ et $\cos \nu$ sont nuls. On déduit de (3), en tenant compte des relations :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$
$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = \cos (P, P'),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 \dots + 2\,PP' \cos (P, P') + 2\,PP'' \cos (P, P'') \dots,$$

expression qui ne dépend que des grandeurs des forces et des angles qu'elles font entre elles.

24. Conditions d'équilibre de plusieurs forces concourantes. — On doit avoir, dans le cas des axes rectangulaires :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0;$$

donc :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0;$$

ou bien :

$$(4) \quad \sum P \cos \alpha = 0, \quad \sum P \cos \beta = 0, \quad \sum P \cos \gamma = 0.$$

Ainsi la somme des projections des forces sur chacun des axes doit être nulle.

Réciproquement, si les équations (4) ont lieu, l'équilibre a lieu, car $R = 0$.

Lorsque les axes sont obliques, il faut encore, pour l'équilibre, que la somme algébrique des projections des forces sur les trois axes soit nulle séparément pour chacun de ces axes.

Théorème des moments.

25. Définition. — Lorsque plusieurs forces sont situées dans un même plan, on appelle *moment* d'une force par rapport à un point du plan, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée du point sur la force. Ainsi le *moment* de la force P représentée par la droite AB, relativement au point O, est le produit :

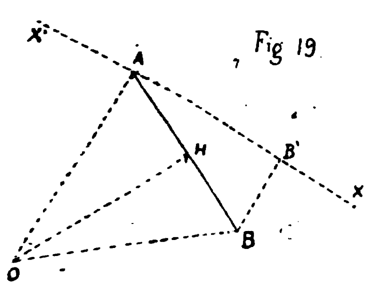


Fig 19

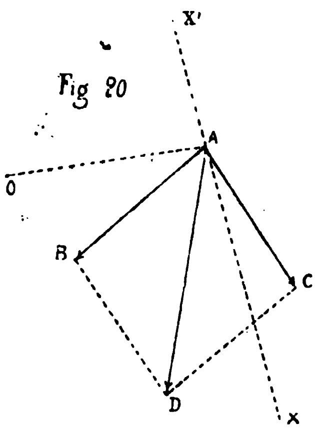
$$AB \times OH.$$

C'est, comme on le voit aisément, le double de l'aire du triangle OAB; or, si l'on prend OA pour base de ce triangle, le double de son aire est également représenté par :

$$OA \times AB',$$

AB' étant la projection de AB sur la droite AX perpendiculaire à OA. On peut donc dire que le moment de la force P appliquée au point A, relativement au point O, est le produit de la distance OA par la projection AB' de la force sur une droite AX perpendiculaire à OA. Lorsque plusieurs forces sont appliquées au point A dans le même plan, il convient de donner des signes à leurs moments. Nous regarderons le point O comme fixe; alors chacune des forces tendra à faire tourner le plan dans un sens ou dans l'autre autour du point O. Si nous projetons les forces sur la droite X'X perpendiculaire à OA, il est clair que les forces dont les projections se font sur AX tendront à faire tourner le plan dans un certain sens, et que les forces dont les projections se font sur AX' tendront à faire tourner le plan en sens contraire. Si l'on regarde les premières projections comme positives et les autres comme négatives, on convient de donner au moment de chaque force le signe de sa projection. D'après cela, le moment de chaque force est égal en grandeur et en signe au produit de sa projection par la distance OA.

Fig 20



Cela posé, considérons les deux forces : $AB = P$, $AC = Q$, appliquées au point A, et leur résultante $AD = R$: nous aurons en projetant sur AX :

$$\text{moment } P = OA \times \text{proj. } AB,$$
$$\text{moment } Q = OA \times \text{proj. } AC,$$
$$\text{moment } R = OA \times \text{proj. } AD.$$

Or :

$$\text{proj. } AD = \text{proj. } AB + \text{proj. } AC;$$

donc :

$$\text{mom. R} = \text{mom. P} + \text{mom. Q}.$$

Le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes. Ce théorème est dû à Varignon.

REMARQUE I. — Lorsque le point O est situé sur la résultante, le moment de la résultante étant nul, les moments des forces P et Q sont égaux et de signes contraires.

REMARQUE II. — La projection de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées au point A étant égale à la somme des projections des composantes, on voit que le théorème de Varignon a lieu quel que soit le nombre de forces appliquées en A, ces forces étant supposées dans un même plan contenant le point O.

26. Expression du moment d'une force par rapport à l'origine en fonction des composantes de la force et des coordonnées de son point d'application. — Soit une force $AP = P$ dont les composantes, suivant deux axes rectangulaires, sont :

$$AB = X, \quad AC = Y;$$

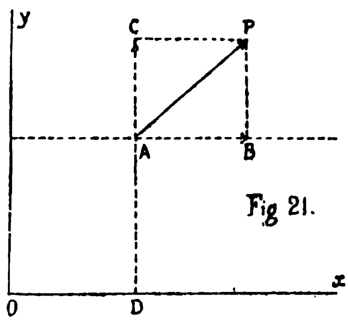


Fig 21.

désignons en outre par x, y les deux coordonnées du point A.

Nous considérerons comme positifs les moments des forces qui tendent à faire tourner le plan de Ox vers Oy, et comme négatifs les moments des forces qui tendent à le faire tourner de Oy vers Ox. On a évidemment et dans tous les cas :

$$\text{mom. P} = \text{mom. X} + \text{mom. Y},$$
$$\text{mom. X} = -yX; \quad \text{mom. Y} = +xY.$$

Donc :

$$\text{mom. P} = xY - yX.$$

CHAPITRE II

COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES

Théorème des moments. — Détermination des coordonnées du centre des forces parallèles. — Équilibre des forces parallèles.

§ I. — *Composition des forces parallèles.*

27. Composition de deux forces parallèles et de même sens. — On peut déduire la composition de deux forces parallèles de celle de deux forces concourantes, en supposant que le point de concours s'éloigne à l'infini.

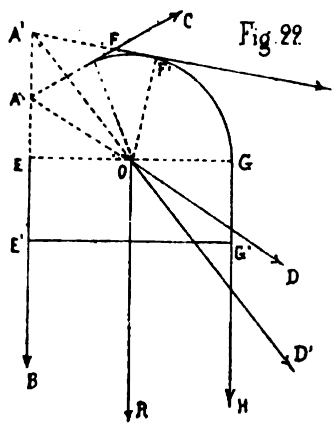


Fig. 22

Soient les deux forces :

$$AB = P, \quad AC = Q,$$

appliquées au point A, $AD = R$ leur résultante. D'un point quelconque O de cette résultante, abaissons sur les forces des perpendiculaires :

$$OE = p, \quad OF = q.$$

Nous avons vu que les moments Pp, Qq, étaient égaux et de signes contraires, et réciproquement que si l'on avait pour un point O du plan l'égalité :

$$Pp + Qq = 0,$$

le point O appartenait à la direction de la résultante; nous pouvons supposer les forces P et Q appliquées aux points

E et F supposés reliés invariablement au point A. Cela posé, laissons fixe la force P, et faisons tourner la force Q de manière que le point F décrive l'arc de cercle décrit de O comme centre avec q pour rayon, la force Q restant tangente à cet arc de cercle. Considérons la position F′C′ de la force Q ; les moments

$$P \times OE \text{ et } Q \times OF'$$

sont encore égaux et de signes contraires ; donc le point O appartient encore à la direction de la nouvelle résultante, que l'on obtiendra en joignant A′O. Ainsi la résultante passera toujours par le point O. Si nous faisons tendre la force Q vers la position limite GH parallèle à P, la résultante passera toujours par le point O et sera à la limite parallèle à P.

La formule :

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ \cos(P, Q)$$

donnera, à la limite où $(P, Q) = 0$,

$$R = P + Q.$$

Enfin on aura, en ne tenant plus compte du signe :

$$P \times OE = Q \times OG,$$

ou bien :

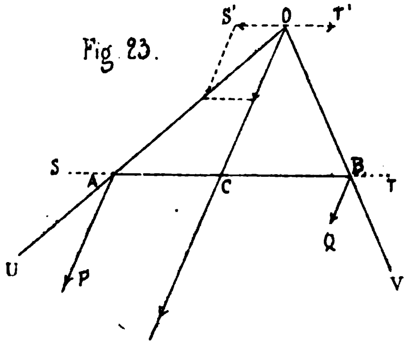
$$\frac{P}{Q} = \frac{OG}{OE}.$$

De là ce théorème :

Deux forces parallèles et de même sens appliquées à deux points invariablement liés entre eux, ont une résultante, qui leur est parallèle, de même sens, égale à leur somme, et dont la direction partage la droite d'application en deux segments inversement proportionnels aux forces.

28. Démonstration directe. — Soient les deux forces parallèles et de même sens AP, BQ, appliquées aux points A et B reliés entre eux par une droite rigide et inextensible;

Fig. 23.



appliquons à ces deux points deux forces égales : AS et BT, agissant suivant la droite AB, mais en sens contraire; ces forces se détruisant, la résultante de P et de Q n'en sera pas modifiée; mais P et S ont une résultante AU; Q et T en ont une BV; on peut transporter ces deux résultantes au point O, où leurs directions se coupent nécessairement, et là redécomposer chacune en deux composantes parallèles aux forces qui les ont produites; on aura ainsi deux forces égales et contraires OS' et OT' qui se détruiront, et suivant OC parallèle à P et à Q, deux forces égales respectivement à P et à Q qui s'ajouteront pour donner la résultante définitive P + Q. Cette résultante peut être transportée au point C, qu'il nous reste à déterminer; or OA étant la direction de la résultante des forces P et S appliquées en O, on a :

$$\frac{P}{S} = \frac{OC}{AC}, \quad \text{de même } \frac{Q}{S} = \frac{OC}{BC}, \quad \text{d'où } \frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

29. Composition de deux forces parallèles et de sens contraires. — On pourrait procéder identiquement comme nous l'avons fait au numéro (28), mais il vaut mieux avoir recours à la démonstration suivante :

Soient les deux forces parallèles et de sens contraires AP = P, BQ = Q. Je prolonge AB, et sur ce prolongement je prends un point C tel que la force P soit la résultante d'une force $CD = P - Q$ et d'une force $BE = Q$, toutes deux parallèles à P. D'après le cas déjà considéré (28), on aura :

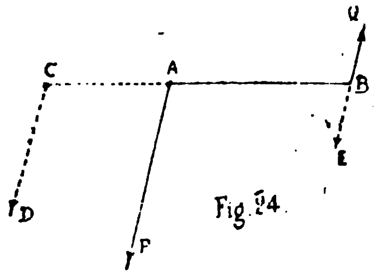


Fig. 24.

$$\frac{P - Q}{Q} = \frac{AB}{AC}, \qquad (1)$$

d'où

$$AC = AB \frac{Q}{P - Q};$$

les deux forces Q appliquées au point B se détruisent, et il reste seulement la force

$$CD = P - Q$$

qui est la résultante cherchée.

Par conséquent :

Deux forces parallèles et de sens contraires ont une résultante qui leur est parallèle, dirigée dans le sens de la plus grande, et dont la direction rencontre le prolongement de la droite qui joint leurs points d'application en un point dont les distances aux points d'application des forces sont en raison inverse des forces. De l'égalité (1) on déduit :

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Les trois forces P, Q, R *sont donc proportionnelles aux distances des points d'application des deux autres.*

30. Cas où les forces de sens contraires sont égales. — Si $P = Q$, on trouve en appliquant la règle précédente :

$$R = P - Q = 0 \quad \text{et} \quad AC = \frac{AB \times Q}{P - Q} = \infty.$$

On trouve donc que : les deux forces ont une résultante nulle, appliquée à une distance infinie. Ce qui n'a pas de sens. La résultante n'existe plus, comme on peut le démontrer de la manière suivante : Supposons qu'il existe une résultante CR. Faisons tourner le système de deux angles droits dans le plan des deux forces autour du milieu O de la droite AB; la force CR viendra en C′R′; et C′R′ sera encore la résultante des deux forces; mais la force Q a pris la place de la force P et Q = P; le système est donc le même que précédemment; il admet donc aussi la résultante CR; mais cela est impossible, puisque C′R′ n'est pas la force CR transportée en un point de sa direction.

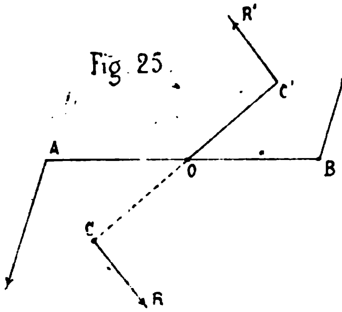


Fig. 25.

Un pareil système a été appelé *couple* par M. Poinsot, qui en a fait un élément essentiel de la Mécanique.

31. Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. — Considérons un nombre quelconque de forces parallèles P, P′, P″, appliquées en des points A, A′, A″ liés entre eux d'une manière invariable, et supposons d'abord que toutes les forces tirent dans le même sens. Le point d'application de leur résultante s'obtiendra en composant les deux premières forces, puis leur résultante avec la troisième, etc. *La résultante des forces données leur sera parallèle et égale à leur somme.*

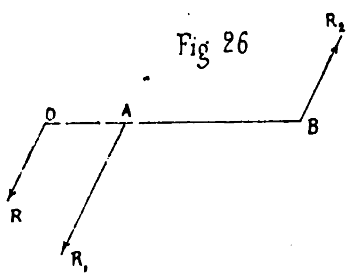


Fig. 26

Admettons en second lieu qu'un certain nombre de forces tirent dans un sens, et les autres en sens contraire. On composera les premières ce qui donnera une force AR_1, les secondes ce qui donnera BR_2; les forces AR_1, BR_2 auront une résultante OR, excepté dans le cas où $R_1 = R_2$;

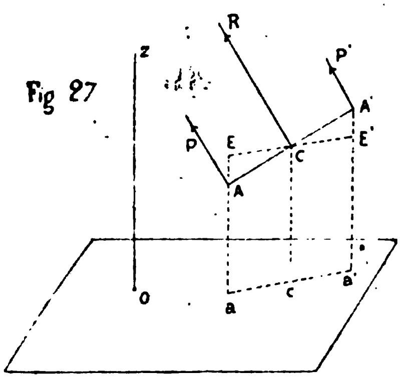
cette résultante est égale à l'excès de la somme des forces qui tirent dans un sens sur la somme des forces qui tirent en sens contraire.

Le point d'application de la résultante de plusieurs forces est déterminé par une suite de proportions qui ne dépendent que des points d'application des forces et des grandeurs de ces forces.

§ II. — *Théorème des moments. — Détermination des coordonnées du centre des forces parallèles.*

32. Théorème des moments. — Soient trois axes, rectangulaires ou obliques, Ox, Oy, Oz; les points d'application des forces seront déterminés par leurs coordonnées. Nous supposerons tout d'abord les z de tous ces points positifs. Particularisons encore davantage, considérons le cas de deux forces parallèles et de même sens. Soit :

Fig 27



$$Aa = z,\ A'a' = z',\ Cc = z_1.$$

Menons ECE' parallèle à aa', nous aurons :

$$\frac{AE}{A'E'} = \frac{AC}{A'C} = \frac{P'}{P},$$

$AE = z_1 - z$; $A'E' = z' - z_1$; donc :

$$\frac{z_1 - z}{z' - z_1} = \frac{P'}{P},$$

d'où

$$(P + P')\, z_1 = Pz + P'z'.$$

L'expression Pz est ce qu'on nomme le moment de la force P par rapport au plan xoy, et à la direction Oz; c'est, comme on voit, le produit de la force P par la distance z du point d'application de la force au plan, cette distance étant comptée sur une direction parallèle à Oz. On a donc ce théorème :

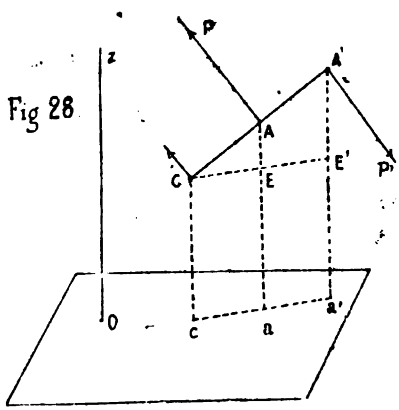
Le moment de la résultante de deux forces parallèles par rapport à un plan, est égal à la somme des moments des forces par rapport à ce plan.

Ce théorème s'étend facilement à un nombre quelconque de forces parallèles P, P′, P″... dont les points d'application sont situés du même côté du plan xoy. On aura encore :

$$Rz_1 = Pz + P'z' \ldots = \sum Pz.$$

33. Cas de deux forces parallèles et de sens contraires. — Supposons les points d'application des forces encore du même côté du plan xoy. Soient :

Fig 28



$$Aa = z,\ A'a' = z',\ Cc = z_1.$$

On a :

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{P'}{P} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{z - z_1}{z' - z_1}$$

$$z_1 (P - P') = Pz - P'z',$$

ou

$$Rz_1 = Pz - P'z',$$

Donc le moment de la résultante de deux forces parallèles et de sens contraires est égal à la différence des moments de ces forces.

34. Cas où les forces parallèles sont dirigées dans deux sens différents. — Considérons plusieurs forces parallèles, les unes P, P′... dirigées dans un sens, les autres P″, P‴... dirigées en sens contraire; soit R_1 la résultante des premières, R_2 la résultante des secondes. On aura :

$$R = R_1 - R_2$$

et d'après le numéro (33) :

$$\text{mom. } R = \text{mom. } R_1 - \text{mom. } R_2.$$

mais d'après le numéro (32) :

$$\text{mom. } R_1 = Pz + P'z'' \ldots \qquad R_1 = P + P' \ldots$$
$$\text{mom. } R_2 = P'z' + P'''z''' \ldots \qquad R_2 = P' + P''' \ldots$$

Donc :

$$\begin{cases} R = P + P' \ldots - P' - P''' \ldots \\ Rz_1 = Pz + P'z' \ldots - P'z' - P'''z''' \ldots \end{cases}$$

On voit que ces équations rentrent dans les suivantes :

$$R = P + P' \ldots + P' + P''' \ldots$$
$$Rz_1 = Pz + P'z' \ldots + P'z' + P'''z''' + \ldots$$

pourvu qu'on regarde comme positives les forces qui tirent dans un sens, et comme négatives les forces qui tirent en sens contraire; les moments correspondants seront eux-mêmes considérés comme positifs ou négatifs. A l'aide de cette convention, on a le théorème suivant :

Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles par rapport à un plan, est égal à la somme algébrique des moments de ces forces.

35. Généralisation du théorème des moments. — Il reste enfin à nous affranchir de cette condition que tous les points d'application sont situés au-dessus du plan. Supposons les points d'application les uns au-dessus du plan des xy, les autres au-dessous. Menons un plan XY parallèle à xy, et à une distance h telle que tous les points d'application soient situés au-dessus de ce nouveau plan. Nous aurons (34) :

$$RZ_1 = PZ + P'Z' + \ldots$$

mais :

$$Z = z + h, \quad Z' = z' + h, \quad Z_1 = z_1 + h;$$

donc :

$$Rh + Rz_1 = Pz + P'z' \ldots + h(P + P' \ldots),$$

ou bien à cause de

$$\begin{aligned} R \ &= P + P'' \ldots \\ Rz_1 &= Pz + P'z' \ldots \end{aligned}$$

On voit que le théorème est général, pourvu que les z soient considérés comme positifs d'un côté du plan et négatifs de l'autre côté. Ainsi le signe du moment dépend de deux signes, celui de P et de z.

36. Recherche des coordonnées du centre des forces parallèles. — Si l'on applique le théorème des moments à trois plans coordonnés, on aura pour déterminer la résultante R_1 et les coordonnées x_1, y_1, z_1 de son point d'application :

$$\left\{ \begin{aligned} R \ &= P + P' + \ldots \\ Rx_1 &= Px + P'x' + \ldots \\ Ry_1 &= Py + P'y' + \ldots \\ Rz_1 &= Pz + P'z' + \ldots \end{aligned} \right.$$

Les coordonnées du centre des forces parallèles ne dépendent que des grandeurs des forces et des coordonnées de leurs points d'application.

37. Remarques. I. — La somme des moments des forces P, P′, P″ est égale à zéro pour tout plan passant par le centre des forces parallèles; car, en prenant ce plan pour plan des xy, on aura $z_1 = 0$, et par suite :

$$Pz + P'z' \ldots = 0.$$

Réciproquement, si la somme algébrique des moments d'un système de forces parallèles, par rapport à un plan, est nulle, ce plan contient le centre des forces. Car de l'égalité :

$$Pz + P'z' + \ldots = 0,$$

on conclut $z_1 = 0$.

Dans le cas particulier où les forces P, P′, P″... se réduisent à un couple, on trouve $R = 0$ et les coordonnées x_1, y_1, z_1

deviennent infinies. Le centre des forces n'existe plus ainsi que la résultante.

II. — Si tous les points d'application des forces sont dans un même plan, il est évident que le centre des forces parallèles doit être dans ce plan. C'est ce qu'il est aisé de conclure des équations précédentes. Car si on a :

$$z = ax + by + c,$$
$$z' = ax' + by' + c,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on aura :

$$Rz_1 = a\sum Px + b\sum Py + c\sum P,$$
$$Rz_1 = aRx_1 + bRy_1 + cR, \qquad z_1 = ax_1 + by_1 + c;$$

en prenant ce plan pour plan des xy, on aura :

$$x_1 = \frac{\sum Px}{\sum P}; \quad y_1 = \frac{\sum Py}{\sum P}.$$

III. — Si tous les points d'application sont sur une même droite, le centre des forces parallèles sera aussi sur cette droite, et en le prenant pour axe des x, l'abscisse du centre des forces parallèles sera déterminée par la formule :

$$x_1 = \frac{\sum Px}{\sum P}.$$

IV. — Revenons au cas général, et supposons toutes les forces égales et de même sens; nous aurons :

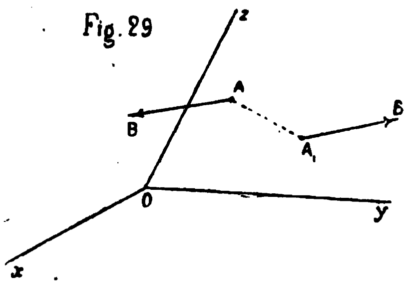
$$x_1 = \frac{\sum x}{n}, \quad y_1 = \frac{\sum y}{n}, \quad z_1 = \frac{\sum z}{n}.$$

La distance du centre des forces parallèles à un plan quelconque est la moyenne arithmétique entre les distances des points d'application à ce plan; le centre des forces parallèles coïncide alors avec le centre des moyennes distances des points d'application.

§ III. — *Équilibre des forces parallèles.*

38. Nous allons chercher d'abord les conditions d'équilibre pour des forces parallèles à une direction :

Fig. 29



$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

Soit A (ξ, η, ζ) le centre des forces de même sens P, P'... dont la somme est S; A_1 (ξ_1, η_1, ζ_1) le centre des forces tirant en sens contraire P''', P^{IV} dont la somme est S_1 on aura :

$$(E) \left\{ \begin{array}{ll} S \;= P + P' + \ldots & S_1 \;= P''' + P^{IV} + \ldots \\ S\xi = Px + P'x' + \ldots & S_1\xi_1 = P'''x''' + P^{IV}x^{IV} + \ldots \\ S\eta = Py + P'y' + \ldots & S_1\eta_1 = P'''y''' + P^{IV}y^{IV} + \ldots \\ S\zeta = Pz + P'z' + \ldots & S_1\zeta_1 = P'''z''' + P^{IV}z^{IV} + \ldots \end{array} \right.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que les deux résultantes partielles agissent suivant la même direction, en sens contraire, et qu'elles aient la même intensité. Donc on doit avoir, tout d'abord :

$$S_1 = -S.$$

En second lieu, il faut que la direction AA_1 soit la direction commune des forces, donc :

$$\frac{\xi - \xi_1}{\alpha} = \frac{\eta - \eta_1}{\beta} = \frac{\zeta - \zeta_1}{\gamma};$$

$$\text{or : } \xi = \frac{Px + P'x' + \ldots}{S}, \quad \xi_1 = -\frac{P'''x''' + P^{IV}x^{IV} + \ldots}{S}, \text{ etc.,}$$

on a donc :

$$(1)\qquad P + P' + \ldots, \quad + P''' + P^{\text{IV}} + \ldots = 0 \quad \text{ou} \quad \sum P = 0;$$

$$(2)\qquad \frac{\sum Px}{\alpha} = \frac{\sum Py}{\beta} = \frac{\sum Pz}{\gamma}.$$

Les trois équations (1) et (2) sont celles de l'équilibre.

Si l'on avait pris l'axe Oz parallèle aux forces, on aurait eu : $\alpha = 0$ $\beta = 0$, et on aurait trouvé pour les conditions d'équilibre :

$$\sum P = 0, \quad \sum Px = 0, \quad \sum Py = 0.$$

On peut énoncer ainsi ces conditions :

1° *La somme algébrique des forces doit être nulle;*

2° *La somme de leurs moments, par rapport à deux plans parallèles à leur direction, doit être nulle pour chacun d'eux.*

39. — On peut demander en second lieu que l'équilibre ait lieu, quelle que soit la direction des forces. Les équations (2) devront être vérifiées quels que soient α, β, γ, ce qui exige que l'on ait :

$$\sum Px = 0, \quad \sum Py = 0, \quad \sum Pz = 0.$$

On aura, dans ce cas, quatre équations d'équilibre.

Revenons au premier cas, et supposons toutes les forces situées dans un même plan. Voyons ce que deviennent les deux équations (2).

Le plan qui contient les forces aura pour équation :

$$(3)\qquad z = mx + ny + h$$

et la direction α, β, γ étant parallèle à ce plan, on devra avoir :

$$(4)\qquad \gamma = m\alpha + n\beta.$$

Séparons les deux équations (2)

$$\gamma \sum Px = \alpha \sum Pz; \quad \gamma \sum Py = \beta \sum Pz,$$

remplaçons y, z par leur valeur (3); puis tenons compte de $\sum P = 0$, et nous aurons :

$$(\gamma - m\alpha) \sum Px = n\alpha \sum Py,$$
$$(\gamma - n\beta) \sum Py = m\beta \sum Px;$$

remplaçons dans ces équations γ par sa valeur (4), et il viendra :

$$\beta \sum Px = \alpha \sum Py,$$
$$\alpha \sum Py = \beta \sum Px.$$

Il n'y a donc plus qu'une seule équation (en dehors de $\sum P = 0$) :

$$\frac{\sum Px}{\alpha} = \frac{\sum Py}{\beta}; \sum P = 0,$$

laquelle est indépendante de la position du plan des forces.

Si l'axe des y a été pris parallèle aux forces, on aura $\alpha = 0$, et la condition précédente se réduira à :

$$\sum Px = 0, \quad \sum P = 0.$$

Remarque. — Les propositions établies pour la composition des forces parallèles peuvent conduire à des propositions purement géométriques; nous nous bornerons à en citer un exemple.

Prenons un triangle, ABC, aux sommets duquel sont appliquées des forces P, Q, R; puis cherchons le centre des forces parallèles;

P et Q ont une résultante appliquée en F, et on a :

(1) $$\frac{AF}{BF} = \frac{Q}{P},$$

P et R ont une résultante appliquée en E, et on a :

(2) $$\frac{CE}{AE} = \frac{P}{R}.$$

Enfin pour Q et R on a, D étant le point d'application de leur résultante :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{R}{Q}. \tag{3}$$

Les trois droites AP, BE, CF se coupent en un même point qui est le centre cherché ; on a, en multipliant les équations (1) (2) (3) membre à membre :

$$\frac{AF \times BD \times CE}{AE \times CD \times BF} = 1,$$

ce qui est la condition connue pour que trois droites partant des sommets d'un triangle concourent en un même point.

CHAPITRE III

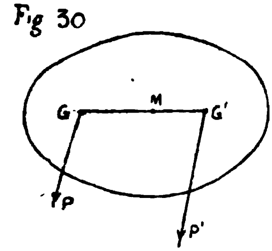
CENTRES DE GRAVITÉ

§ I. — *Considérations générales.*

40. Tous les corps abandonnés à eux-mêmes prennent un mouvement vers l'intérieur de la terre, suivant une direction perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles, et qu'on nomme *verticale.* On peut admettre qu'ils sont sollicités par une force dirigée suivant la verticale; cette force est la *pesanteur* ou *gravité.* La direction de la verticale change d'un lieu à l'autre, ainsi que l'intensité de la pesanteur. Cette intensité varie aussi en un même lieu avec l'altitude; mais pour les corps de dimensions ordinaires que nous considérons à la surface de la terre, nous pouvons regarder les verticales comme parallèles et la pesanteur comme constante. La pesanteur sollicite toutes les parties des corps, aussi bien intérieures qu'extérieures; ainsi, il faut le même effort pour supporter un corps entier ou les parties dans lesquelles on le divise; si le corps est creux, les corps que l'on y placera exerceront le même effort que s'ils étaient placés à l'extérieur. Un corps pesant peut donc être considéré comme un assemblage de points matériels liés entre eux d'une manière invariable, et sollicités par de petites forces parallèles. Nous pouvons appliquer la théorie des forces parallèles; nous verrons ainsi que toutes ces petites forces ont une résultante qui leur est parallèle, et est égale à leur somme; on l'appelle le *poids* du corps. Nous ne pouvons pas, il est vrai, changer à volonté la direction de la pesanteur, comme nous l'avons fait pour la direction des forces parallèles; mais nous pouvons faire quelque chose d'équivalent en changeant la position du corps. Le centre des forces parallèles deviendra le centre de gravité, quelle que soit la position du corps autour de ce point. Dans toutes les questions d'équilibre relatives à un corps solide, on pourra faire abstraction de la pesanteur de ses diverses parties, pourvu qu'on ajoute aux autres forces données qui agissent sur le corps une force verticale égale à son poids et appliquée à son centre de gravité.

41. Lorsqu'on connaît les centres de gravité G et G′ de deux parties d'un corps, on en déduit immédiatement la position du centre de gravité du corps, sur la ligne GG′ par la proportion :

Fig 30



$$\frac{GM}{P'} = \frac{G'M}{P} = \frac{GG'}{P+P'}.$$

Si un corps est divisé en un nombre quelconque de parties dont les poids et les centres de gravité sont connus, on en pourra déduire son centre de gravité par une suite de proportions; mais il est préférable de déterminer ses trois coordonnées x_1, y_1, z_1 par le théorème des moments des forces parallèles.

Soient : p, p', p''... les poids des diverses parties du corps, x, y, z, x', y', z'... les coordonnées des centres de gravité de ses diverses parties, P le poids total du corps; on aura :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} P \;\;\;= p + p' + p'' + \dots \\ Px_1 = px + p'x' + p''x'' + \dots \\ Py_1 = py + p'y' + p''y'' + \dots \\ Pz_1 = pz + p'z' + p''z'' + \dots \end{array}\right.$$

ces équations déterminent x_1, y_1, z_1.

42. Centre de gravité d'un corps homogène. — Si le corps a été divisé en un nombre infini de parties infiniment petites, on pourra prendre tel point qu'on voudra de chacune d'elles pour son centre de gravité; les seconds membres des équations (1) se composeront alors d'une infinité de parties infiniment petites, dont les sommes seront des intégrales définies; on pourra donc, par les règles du calcul intégral, déterminer le centre de gravité d'un corps quelconque sans connaître d'avance celui d'aucune de ses parties.

Entrons à ce sujet dans quelques détails. — Supposons d'abord le corps homogène, c'est à dire que des volumes égaux aient des poids égaux. Rapportons le corps à trois axes de coordonnées rectangulaires; dans les équations (1), nous pouvons remplacer les poids par les volumes; prenons pour élément de volume le parallélipipède $dxdydz$, dont le centre de gravité a pour coordonnées x, y, z, soit V le volume du corps; les équations (1) donneront :

$$(2)\qquad x_1 = \frac{\iiint x\,dxdydz}{\iiint dxdydz}, \quad y_1 = \frac{\iiint y\,dxdydz}{\iiint dxdydz},$$
$$z_1 = \frac{\iiint z\,dxdydz}{\iiint dxdydz},$$

où les intégrales s'étendent à toute la masse du corps.

43. Centre de gravité d'un corps non homogène. — Voyons quelles formules nous aurons si le corps n'est pas homogène. — Rappelons d'abord que l'on nomme ***poids spécifique d'une substance homogène*** le poids de l'unité de volume de cette substance; on peut dire aussi dans ce cas que le poids spécifique du corps est le rapport du poids d'un volume quelconque du corps à ce volume. Si le corps n'est pas homogène, nous considérerons un petit volume Δv

contenant dans son intérieur le point x, y, z; soit ΔP le poids de ce petit volume; si l'homogénéité avait lieu, le poids spécifique serait $\frac{\Delta P}{\Delta v}$; mais il n'en est pas ainsi; nous appellerons poids spécifique de la substance au point x, y, z la limite du rapport $\frac{\Delta P}{\Delta v}$, quand les dimensions du petit volume diminuent indéfiniment, et nous poserons :

$$\pi = \lim. \frac{\Delta P}{\Delta v}. \tag{3}$$

Cette quantité sera une fonction de x, y, z, que nous supposerons connue. De la formule (3) on tire, en désignant par ε un infiniment petit du premier ordre :

$$\Delta P = \Delta v (\pi + \varepsilon).$$

Soit η un autre infiniment petit du premier ordre, on aura :

$$\begin{aligned} P &= \sum \Delta v (\pi + \varepsilon), \\ Px_1 &= \sum \Delta v (\pi + \varepsilon)(x + \eta), \end{aligned}$$

et en faisant tendre Δv vers zéro :

$$P = \int \pi \Delta v, \quad Px_1 = \int \pi x \Delta v.$$

Nous avons ainsi, pour déterminer x_1, y_1, z_1, les formules (4) :

$$\left\{ \begin{aligned} P &= \iiint \pi dx dy dz, \\ Px_1 &= \iiint \pi x dx dy dz, \\ Py_1 &= \iiint \pi y dx dy dz, \\ Pz_1 &= \iiint \pi z dx dy dz. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

44. Remarques. — On peut souvent simplifier beaucoup la recherche du centre de gravité d'un solide homogène, à l'aide des remarques suivantes dont la démonstration ne présente aucune difficulté :

1° Si la surface du corps est symétrique par rapport à un plan, le centre de gravité est sur ce plan;

2° Si la surface du corps admet un plan diamétral, le centre de gravité est dans ce plan;

3° Si la surface du corps a un axe de symétrie, le centre de gravité est sur cet axe;

4° Si le corps a un centre de symétrie, ce centre est le centre de gravité.

§ II. — *Centre de gravité d'une surface ou d'une ligne.*

45. Supposons qu'un corps s'étende suivant un plan ou suivant une surface courbe, et qu'il ne présente partout qu'une épaisseur extrêmement petite, dans le sens de la normale au plan, ou à la surface, on pourra faire abstraction de cette épaisseur, et concevoir que toute la matière dont le solide est formé se trouve située sur la surface; c'est ainsi qu'on est conduit à considérer une surface comme étant matérielle, et par conséquent comme ayant un centre de gravité. Nous supposerons la surface homogène; alors dans chacune des équations des moments telle que :

$$Px_1 = px + p'x' + \dots,$$

nous pouvons remplacer les poids par les surfaces correspondantes; si $d\omega$ est l'élément de surface au point x, y, z, S la surface totale, on aura :

$$\left.\begin{aligned} Sx_1 &= \int x\,d\omega, \\ Sy_1 &= \int y\,d\omega, \\ Sz_1 &= \int z\,d\omega, \end{aligned}\right\} \quad S = \int d\omega.$$

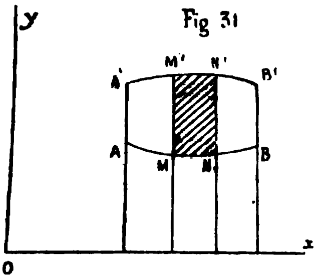
Considérons d'abord le cas d'une surface plane; en prenant

$dxdy$ pour élément de surface, on aura :

$$\left.\begin{array}{l} Sx_1 = \iint x\,dx\,dy, \\ Sy_1 = \iint y\,dx\,dy, \end{array}\right\} S = \iint dx\,dy.$$

46. On peut effectuer une intégration par rapport à x, ou à y; soit par exemple à trouver le centre de gravité de la surface AMNB A'M'N'B' comprise entre les deux ordonnées $x = a$, $x = b$ et les deux courbes :

Fig 31



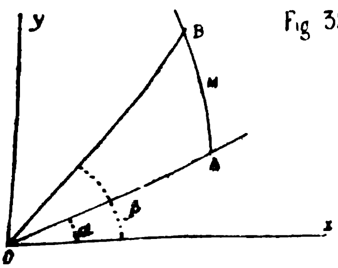
$$y = f(x); \quad y' = \varphi(x).$$

On aura :

$$\left\{\begin{array}{l} S \;=\; \int_a^b (y' - y)\,dx, \\ Sx_1 = \int_a^b (y' - y)\,x\,dx, \\ Sy_1 = \frac{1}{2}\int_a^b (y'^2 - y^2)\,dx. \end{array}\right.$$

47. En coordonnées polaires, soit à trouver le centre de gravité du secteur OAMB; on prendra alors pour élément d'aire $r\,dr\,d\theta$; les moments relativement à Ox et Oy seront :

Fig 32



$$r\,dr\,d\theta \times r\cos\theta, \quad r\,dr\,d\theta \times r\sin\theta.$$

On aura donc :

$$\left\{\begin{array}{l} S \;= \iint r\,dr\,d\theta, \\ Sx_1 = \iint r^2 \cos\theta\,dr\,d\theta, \\ Sy_1 = \iint r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta. \end{array}\right.$$

On peut intégrer par rapport à r depuis $r = 0$ jusqu'à $r =$ le rayon de la courbe, et l'on a :

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta, \\ Sx_1 &= \tfrac{1}{3}\int_\alpha^\beta r^3 \cos\theta\,d\theta, \\ Sy_1 &= \tfrac{1}{3}\int_\alpha^\beta r^3 \sin\theta\,d\theta. \end{aligned}$$

48. Pour les surfaces dans l'espace, on pourra prendre :

$$d\omega = dx\,dy\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

et l'on aura ainsi :

$$\left\{\begin{aligned} S &= \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy, \\ Sx_1 &= \iint x\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy, \\ Sy_1 &= \ldots, \\ Sz_1 &= \ldots \end{aligned}\right.$$

Les quantités $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ seront tirées de l'équation de la surface, et les intégrales doubles s'étendent à toute la partie du plan des xy, sur laquelle la surface se projette.

49. Centre de gravité d'une ligne. — Des considérations analogues à celles que nous avons développées pour les surfaces, conduisent à considérer une ligne droite ou courbe comme étant matérielle et par suite comme ayant un centre de gravité.

Si nous supposons la ligne homogène, et si nous remplaçons dans l'équation des moments les poids par les longueurs des arcs qui leur sont proportionnels, nous aurons :

$$S = \int ds, \quad Sx_1 = \int x ds, \quad Sy_1 = \int y ds, \quad Sz_1 = \int z ds;$$

en prenant trois axes de coordonnées rectangulaires, on aura :

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

$$x_1 = \frac{1}{S}\int x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx,$$

$$y_1 = \ldots,$$

$$z_1 = \ldots$$

Si la ligne est plane, on aura simplement :

$$\left.\begin{aligned} Sx_1 &= \int x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx, \\ Sy_1 &= \int y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx, \end{aligned}\right\} \quad S = \int \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx.$$

§ III. — *Exemples divers de la détermination des centres de gravité.*

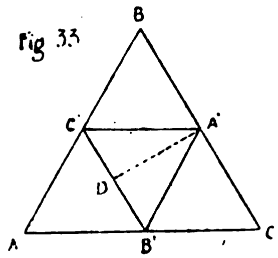
Centres de gravité des lignes.

50. Ligne droite. — Le centre de gravité est au milieu de la longueur.

51. Ligne brisée. — Au milieu de chaque côté, on appliquera une force verticale proportionnelle à la longueur de ce côté, et on cherchera le centre de toutes ces forces parallèles, soit par la composition successive des forces, soit par les formules qui déterminent ses coordonnées.

52. Contour d'un triangle. — Aux milieux A', B', C' des côtés, nous avons des forces parallèles proportionnelles à BC, AC, AB. Soit D le point d'application de la résultante des forces appliquées en B′ et C′; on aura :

Fig 33

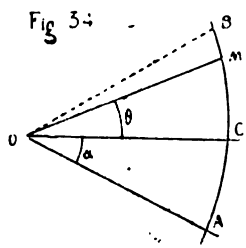


$$\frac{C'D}{B'D} = \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

Donc A′D est la bissectrice de l'angle A′, et le centre de gravité cherché coïncide avec le centre du cercle inscrit au triangle A′B′C′.

53. Arc de cercle. — Soit C le milieu de l'arc AB; le centre de gravité de cet arc sera sur OC; soit x_1 sa distance au point O; désignons par s l'arc CM et par S l'arc AB, nous aurons :

Fig 34



$$Sx_1 = \int x ds; \qquad x = r \cos \theta,$$

$$s = R\theta, \qquad S = 2 R \alpha,$$

$$2\alpha x_1 = R \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta \, d\theta = 2R \sin \alpha.$$

$$x_1 = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} = \frac{Rc}{S},$$

en désignant par c la corde de l'arc.

54. Centre de gravité d'un arc de cycloïde. — Soit OM l'arc dont nous cherchons le centre de gravité; on aura pour le coefficient angulaire de la tangente en un point M :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{MP}{QP} = \frac{\sqrt{QP \times PR}}{QP},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a - x}{x}},$$

en désignant par a le diamètre du cercle générateur; on en déduit :

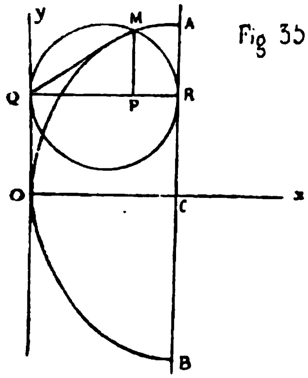


Fig 35

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}},$$

$$S = \int_0^x dx \sqrt{\frac{a}{x}},$$

$$\left\{\begin{aligned} Sx_1 &= \int_0^x x \frac{ds}{dx}\, dx = \int_0^x \sqrt{ax}\, dx, \\ Sy_1 &= \int_0^x y \frac{ds}{dx}\, dx = \int_0^x y \sqrt{\frac{a}{x}}\, dx. \end{aligned}\right.$$

On déduit de là :

$$S = 2\sqrt{ax}, \qquad Sx_1 = \tfrac{2}{3}\, x \sqrt{ax},$$

c'est à dire :

$$x_1 = \frac{x}{3}.$$

Pour déterminer y_1, nous remarquerons que l'on a :

$$\int y \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2y\sqrt{x} - 2\int \frac{dy}{dx} \sqrt{x}\, dx = 2y\sqrt{x} - 2\int \sqrt{a-x}\, dx;$$

par conséquent :

$$Sy_1 = 2\, y \sqrt{ax} + \frac{4}{3} \sqrt{a}\, (a-x)^{\frac{3}{2}} + C,$$

mais pour $x = 0$, $\quad y_1 = 0$; $\quad$ donc :

$$C = -\frac{4}{3} a^2,$$

$$y_1 = y - \frac{2}{3}\, \frac{a^{\frac{3}{2}} - (a-x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

Pour l'arc OA, $\quad x = a$; on a alors :

$$x_1 = \frac{a}{3},$$

$$y_1 = \frac{\pi a}{2} - \frac{2a}{3}.$$

Surfaces.

55. Parallélogramme. — Le centre de gravité est au centre de la figure.

Triangle. — Considérons une médiane, et par cette ligne menons un plan perpendiculaire au triangle; c'est un plan diamétral pour les cordes parallèles au côté correspondant; il contient donc le centre de gravité qui, devant être en outre dans le plan du triangle, sera sur la médiane. C'est donc le point de concours des médianes.

REMARQUE. — Le centre de gravité de la surface d'un triangle est le même que celui du système de trois poids égaux dont les centres de gravité seraient situés aux sommets du triangle.

56. On peut également trouver le centre de gravité d'un triangle par le calcul.

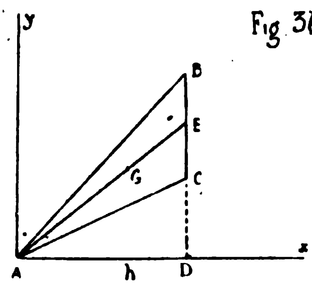


Fig. 56.

Rapportons le triangle à deux axes de coordonnées rectangulaires passant par le sommet A, et dont l'un soit parallèle au côté BC.

On aura :

$$\text{pour AB} \quad y = mx,$$
$$\text{pour AC} \quad y' = m'x,$$

$$S = \int_0^h (y - y')\,dx = \frac{(m - m')h^2}{2},$$

$$Sx_1 = \int_0^h (y - y')\,x\,dx = \frac{(m - m')\,h^3}{3},$$

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^h (y^2 - y'^2)\,dx = \frac{(m^2 - m'^2)\,h^3}{6},$$

d'où :

$$x_1 = \frac{2h}{3} \qquad y_1 = \frac{(m + m')\,h}{3}.$$

Le point E, milieu de BC, a pour coordonnées :

$$x' = h; \quad y' = \frac{(m + m')\,h}{2}.$$

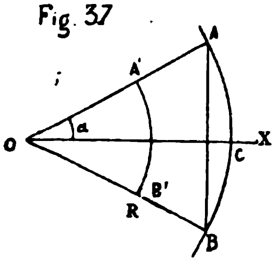
On a donc :

$$x_1 = \frac{2}{3}x' \quad y_1 = \frac{2}{3}y'.$$

Le centre de gravité se trouve donc en G, aux deux tiers de AE.

57. Centre de gravité d'un secteur circulaire. — Soit un secteur circulaire AOB, dont l'angle au centre est 2α. Nous aurons :

Fig. 37



$$S = R^2 \alpha,$$

$$S x_1 = \iint r^2\, dr \cos\theta\, d\theta = \frac{R^3}{3}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{2R^3 \sin\alpha}{3}.$$

$$x_1 = \frac{2R}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}; \; y_1 = 0,$$
$$x_1 = \frac{2Rc}{3l},$$

en désignant par c la corde AB et par l l'arc AB.

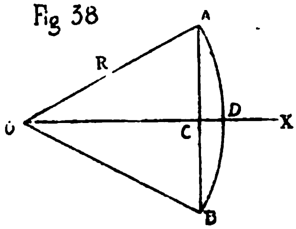
L'abscisse est les $\frac{2}{3}$ de celle du centre de gravité de l'arc AB; on peut s'en rendre compte en décomposant le secteur en secteurs infiniment petits, que l'on peut assimiler à des petits triangles, dont tous les centres de gravité sont sur l'arc A′B′ tel que $OA' = \frac{2}{3}OA$. Reste à trouver le centre de gravité de A′B′; il est évident que son abscisse sera les $\frac{2}{3}$ de celle du centre de gravité de l'arc AB.

58. Centre de gravité du segment de cercle. — On peut le déduire de celui du secteur AOBD et du triangle AOB.

Désignons par :

S la surface du triangle, x l'abscisse de son centre de gravité,
S′ — segment, x' —
S″ — secteur, x'' —

Fig 38



$$AB = c,$$
$$ADB = l,$$
$$OC = h,$$
$$OA = R.$$

On aura :

$$S'' = S + S',$$
$$S''x'' = Sx + S'x',$$

$$S'' = \tfrac{1}{2} Rl, \qquad x'' = \frac{2Rc}{3l},$$

$$S = \tfrac{1}{2} ch, \qquad x = \frac{2h}{3},$$

$$S' = \tfrac{1}{2}(Rl - ch),$$

$$\tfrac{1}{2}(Rl - ch)\,x' = \frac{R^2c}{3} - \frac{ch^2}{3} = \frac{c}{3}(R^2 - h^2) = \frac{c^3}{12},$$

$$x' = \frac{1}{6}\frac{c^3}{Rl - ch};$$

or :

$$c = 2R \sin \frac{l}{2R}, \qquad h = R \cos \frac{l}{2R}.$$

On aura donc :

$$x' = \frac{4}{3} \frac{R^2 \sin^3 \frac{l}{2R}}{l - R \sin \frac{l}{R}}.$$

59. Centre de gravité du segment compris entre les ordonnées $x = \alpha$ $x = \beta$ et une courbe du deuxième degré. — Les deux ordonnées de la courbe correspondant à une même abscisse seront :

$$y' = mx + n - \sqrt{ax^2 + bx + c},$$
$$y'' = mx + n + \sqrt{ax^2 + bx + c},$$

$$\mathrm{S} \;=\; \int (y'' - y')\, dx = 2\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx,$$
$$\mathrm{S}x_1 = \int x(y'' - y')\, dx = 2\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, x dx,$$
$$\mathrm{S}y_1 = \tfrac{1}{2}\int (y''^2 - y'^2)\, dx = 2\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,(mx + n)\, dx.$$

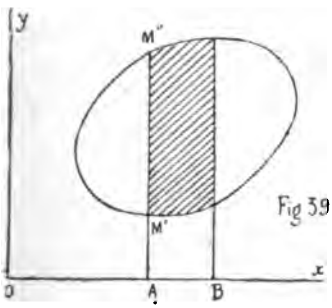


Fig 39

Soient α et β les abscisses des points A et B.

$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta \sqrt{ax^2 + bx + c}\;\; x dx}{\int_\alpha^\beta \sqrt{ax^2 + bx + c}\;\; dx},$$

$$y_1 = \frac{\int_\alpha^\beta \sqrt{ax^2 + bx + c}\,(mx + n)\, dx}{\int_\alpha^\beta \sqrt{ax^2 + bx + c}\; dx},$$

toutes les intégrations peuvent s'effectuer sous forme finie.

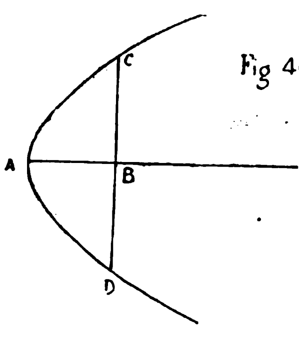


Fig 40

Si $m = n = a = c = 0$ $\alpha = 0$ $\beta = x$, on trouvera le centre de gravité du segment CADB de la parabole, limité par la corde CD perpendiculaire à l'axe.

$$x_1 = \frac{\int_0^x \sqrt{bx}\, x dx}{\int_0^x \sqrt{bx}\;\; dx} = \frac{\frac{2}{5}\, x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}\, x.$$

60. Centre de gravité de l'aire de la cycloïde ABC. — Ce point est évidemment sur l'axe de symétrie CD.

On a :

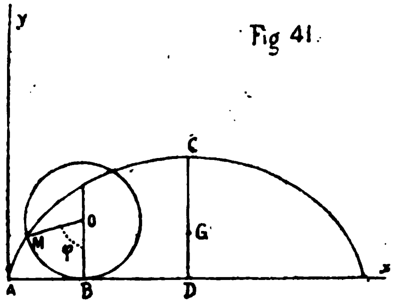


Fig 41.

$$S = \int y\,dx,$$

$$Sy_1 = \tfrac{1}{2}\int y^2\,dx,$$

$$2y_1 = \frac{\int y^2\,dx}{\int y\,dx}.$$

Si nous appelons φ l'angle BOM et a le rayon du cercle générateur, on a :

$$x = a(\varphi - \sin\varphi);\qquad y = a(1 - \cos\varphi),$$

$$2y_1 = a\,\frac{\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi)\,d\varphi}{\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi},$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0;\quad \int^{2\pi}\cos^3\varphi\,d\varphi = 0;\quad \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi = \pi,$$

$$2y_1 = a\,\frac{2\pi + 3\pi}{2\pi + \pi} = \frac{5a}{3}\qquad y_1 = \frac{5a}{6}.$$

61. Centres de gravité des surfaces courbes. — Les formules générales pour trouver le centre de gravité des surfaces courbes sont, comme nous l'avons vu en posant :

$$p = \frac{dz}{dx},\quad q = \frac{dz}{dy},$$

$$\left.\begin{aligned}
S &= \iint dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2},\\
Sx_1 &= \iint x\,dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2},\\
Sy_1 &= \iint y\,dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2},\\
Sz_1 &= \iint z\,dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2},
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

Nous allons appliquer ces formules générales à quelques exemples.

62. Centre de gravité d'une portion de surface sphérique. — Soit la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Nous aurons :

$$p = \frac{-x}{z}; \quad q = \frac{-y}{z}; \quad \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{z}.$$

Dans ce cas on déduit des formules (A) :

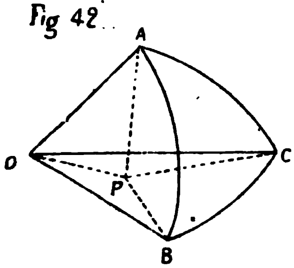
$$S = a \iint \frac{dx\, dy}{z}; \quad S z_1 = a \iint dx\, dy = a\, S_3,$$

en désignant par S_3 la projection de la surface S sur le plan des xy, par conséquent en désignant par : S_1, S_2, S_3 les projections de la surface S sur les plans des yz, xz et xy, on aura :

$$z_1 = \frac{a S_3}{S}; \quad y_1 = \frac{a S_2}{S}; \quad x_1 = \frac{a S_1}{S}.$$

Application au triangle sphérique. — Soit R le rayon de la sphère, h la distance du centre de gravité du triangle sphérique au plan OBC; on aura, en désignant par a, b, c les côtés et A, B, C les angles du triangle sphérique :

Fig 42.



$$h = \frac{R S_1}{S},$$

$$S = R^2 (A + B + C - \pi); \quad S_1 = PBC = BOC - BPO - CPO,$$
$$BOC = \tfrac{1}{2} R^2 a,$$

POB est la projection de AOB,

$$AOB = \tfrac{1}{2} R^2 c; \quad POB = \tfrac{1}{2} R^2 c \cos B,$$

POC est la projection de AOC,

$$AOC = \tfrac{1}{2} R^2 b; \quad POC = \tfrac{1}{2} R^2 b \cos C.$$

Donc :

$$h = \frac{R}{2}\,\frac{a - b\cos C - c\cos B}{A + B + C - \pi}.$$

On trouvera de même les distances du centre de gravité aux plans OAC, OAB.

63. Centres de gravité des surfaces de révolution. — La recherche des centres de gravité des surfaces de révolution peut s'effectuer à l'aide de simples quadratures.

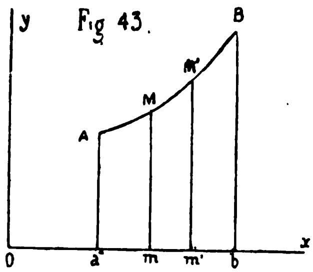
Considérons la surface engendrée par la révolution de l'arc AB, d'une courbe plane, tournant autour de Ox. Soit $MM' = ds$; MM' engendre la surface latérale d'un tronc de cône :

$$dS = 2\pi\, y\, ds,$$

$$S = 2\pi \int y\, ds.$$

Le centre de gravité de la surface courbe engendrée par MM' est sur Ox, entre m et m' ; si j'applique le théorème des moments, j'aurai :

Fig 43.



$$Sx_1 = 2\pi \int xy\, ds,$$

$$x_1 = \frac{\int xy\, ds}{\int y\, ds} = \frac{\int_\alpha^\beta xy\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx}{\int_\alpha^\beta y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx}.$$

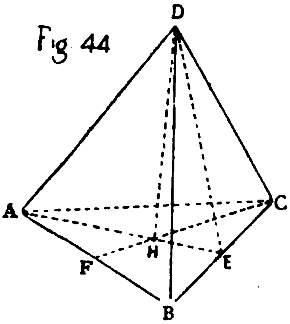
Dans l'expression de x_1 on doit considérer y comme une fonction de x donnée par l'équation de la courbe.

Exemples pour la détermination des centres de gravité des volumes.

64. Prisme triangulaire. — Il est au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des deux bases. Il en est de même pour un prisme quelconque.

65. Pyramide triangulaire. — Le plan qui passe par AD et le milieu E de BC est un plan diamétral, il en est de même du plan qui passe par CD et le milieu F de AB. Ces deux plans se coupent suivant la droite DH qui joint le sommet D au centre de gravité de la base. Il est facile de voir qu'il se trouve sur DH au $\frac{1}{4}$ de DH à partir du point H.

Fig 44

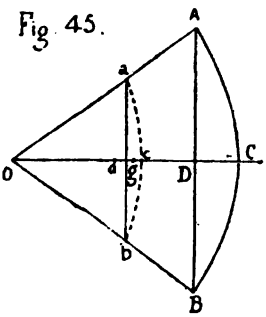


Le centre de gravité du tétraèdre coïncide avec celui du système de quatre poids égaux dont les centres de gravité seraient situés aux quatre sommets.

66. Secteur sphérique. — Soit le secteur sphérique engendré par la révolution du secteur circulaire AOC autour de OC. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans le cas d'un secteur circulaire, montre que le centre de gravité est le même que celui de la zone engendrée par l'arc ac, obtenu en prenant :

$$Oa = Oc = \frac{3\,OA}{4}.$$

Fig 45.



Le centre de gravité de cette zone est le point g, milieu de cd; soit $OC = R$, $DC = H$, on aura :

$$2Og = Od + Oc = \frac{3}{4}(OD + OC) = \frac{3}{4}(2\,OC - DC),$$

$$Og = \frac{3}{4}R - \frac{3}{8}H.$$

On pourra en conclure le centre de gravité du segment sphérique à une base qui est la différence du secteur sphérique et d'un cône.

67. Corps symétriques par rapport à un axe. — Prenons l'axe de figure pour axe des x, désignons par X l'aire de la section perpendiculaire à cette droite, et qui répond à l'abscisse x; on décomposera le volume en tranches infiniment minces, perpendiculaires à l'axe de figure; le volume d'une de ces tranches sera $\mathrm{X}dx$, et son centre de gravité, qui sera sur l'axe de la figure, aura pour abscisse x. On aura donc :

$$\mathrm{V} = \int_\alpha^\beta \mathrm{X}\, dx \qquad \mathrm{V}x_1 = \int_\alpha^\beta \mathrm{X}x\, dx.$$

On est donc ramené à des intégrales simples, si on a su trouver l'expression de X en fonction de x.

68. EXEMPLE. — Soit à trouver le centre de gravité du segment de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

compris entre les plans :

$$x = \alpha, \qquad x = \beta.$$

La section dont l'aire est représentée par X est l'ellipse :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2};$$

on aura :

$$\mathrm{X} = \pi\, bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$\int \mathrm{X}\, dx = \pi\, bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right),$$

$$\int x\,\mathrm{X}\, dx = \pi\, bc\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2}\right);$$

d'où :

$$x_1 = \frac{3}{4}(\alpha + \beta)\frac{2a^2 - \alpha^2 - \beta^2}{3a^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2}.$$

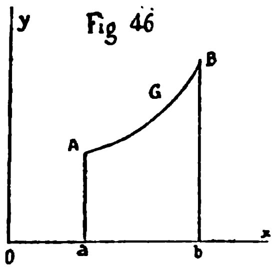
Si $\alpha = 0 \quad \beta = a,$ on trouve :

$$x_1 = \frac{3a}{8}.$$

§ IV. *Théorèmes de Guldin.*

69. I. Théorème relatif aux surfaces. — Soit AB un arc de courbe de longueur l tournant autour d'un axe Ox situé dans son plan, S la surface engendrée, G le centre de gravité de l'arc AB, y_1 l'ordonnée de ce point. On á :

Fig 46



$$S = 2\pi \int y\, ds,$$

$$ly_1 = \int y\, ds;$$

d'où :

$$S = 2\pi l y_1.$$

Donc :

La surface engendrée a pour mesure la longueur de l'arc AB *multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de cet arc.*

Remarque. — Si la courbe au lieu de tourner de 2π tourne seulement de l'angle θ, S' désignant la surface engendrée, on aura évidemment :

$$\frac{S'}{S} = \frac{\theta}{2\pi}; \quad \text{par suite :} \quad S' = \theta l y_1$$

mais θy_1 est l'arc décrit par le centre de gravité. Donc : *Si une courbe plane tourne d'un angle quelconque autour d'un axe situé dans son plan, la surface engendrée est égale à la longueur de la courbe multipliée par l'arc décrit par son centre de gravité.*

70. II. Théorème relatif aux volumes. — Soit ABB'A' une surface plane comprise entre les deux ordonnées AA', BB′ et les deux courbes AB, A′B′, dont nous désignerons

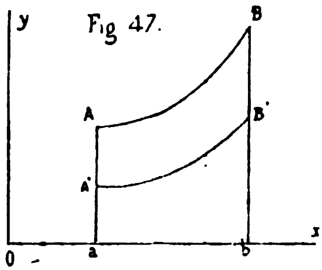


Fig 47.

par y et y' les ordonnées correspondant à une même valeur de x. Le centre de gravité de cette surface plane aura son ordonnée déterminée par l'équation :

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (y^2 - y'^2)\,dx.$$

Le volume V engendré par cette surface, tournant autour d'un axe Ox situé dans son plan et qui ne le traverse pas, sera :

$$V = \pi\int_\alpha^\beta (y^2 - y'^2)\,dx.$$

On a donc :

$$V = 2\pi\, y_1\, S$$

Ainsi : *Le volume engendré par la révolution d'une aire plane autour d'une droite située dans son plan, est égal à l'aire de la surface génératrice, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Même remarque que précédemment, si la surface tourne d'un angle θ au lieu de tourner de 2π.

71. Extension du deuxième théorème de Guldin. — Le

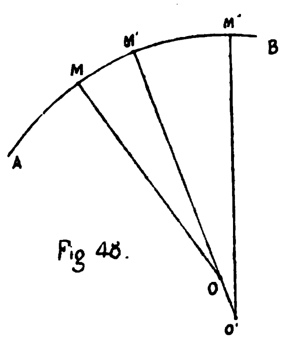


Fig 48.

théorème de Guldin relatif aux volumes peut être étendu de la manière suivante.

Si une surface plane se transporte dans l'espace, de telle sorte qu'un de ses points reste toujours sur une courbe AB *et que son plan demeure normal à la courbe, le solide engendré par le mouvement de cette surface aura pour mesure l'aire de la surface multipliée par la courbe que décrit son centre de gravité.*

En effet, considérons deux points infiniment voisins M et M′ de la courbe; le plan osculateur de la courbe en M est coupé par les deux positions consécutives du plan de la courbe mobile suivant les droites MO, M′O. O est le centre de courbure en M; les deux plans se coupent suivant une droite passant par le point O et perpendiculaire au plan osculateur en M; cette droite est l'axe du cercle osculateur. On pourra imaginer que la courbe tourne autour de cette droite de l'angle infiniment petit MOM′, pour passer de la première position à la seconde. Alors le théorème de Guldin relatif au volume engendré est applicable; il le sera encore quand on passera de M′ en M″, etc. Le théorème est donc démontré.

72. Volume du cylindre tronqué. — Le volume d'un cylindre tronqué dont la base est sur le plan des xy et les arêtes perpendiculaires à cette base est exprimé par :

$$V = \iint z\, dx\, dy.$$

Soit φ l'angle de la base supérieure avec la base inférieure; les éléments de l'aire de la base supérieure sont :

$$\frac{dx\, dy}{\cos\varphi}, \qquad \text{l'aire totale sera :} \qquad \frac{A}{\cos\varphi};$$

A désignant l'aire de la base inférieure.

Si donc z_1 est l'ordonnée du centre de gravité de la base supérieure, on aura :

$$\frac{A}{\cos\varphi} z_1 = \iint \frac{z\, dx\, dy}{\cos\varphi}, \qquad \text{d'où :} \qquad A z_1 = \iint z\, dx\, dy = V;$$

ainsi :

$$V = A z_1.$$

Donc : le volume est égal à la base multipliée par la distance à cette base du centre de gravité de la base supérieure.

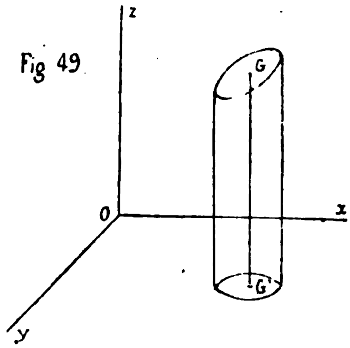
73. REMARQUE. — La projection du point G est le point G′, centre de gravité de la base inférieure; on a en effet :

$$\frac{A}{\cos\varphi}x_1 = \iint \frac{x\,dx\,dy}{\cos\varphi}; \quad \frac{A}{\cos\varphi}y_1 = \iint \frac{y\,dx\,dy}{\cos\varphi};$$

ou bien :

$$Ax_1 = \iint x\,dx\,dy; \quad Ay_1 = \iint y\,dx\,dy.$$

Fig 49

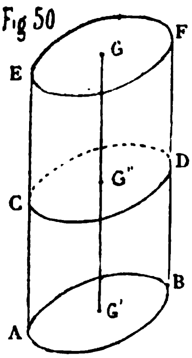


On trouve donc pour x_1 et y_1 les valeurs mêmes auxquelles on est conduit en cherchant le centre de gravité de la base inférieure. Ainsi les centres de gravité des sections planes faites dans un cylindre, sont tous sur une même parallèle aux génératrices.

74. On peut en conclure que :

Le volume d'un cylindre tronqué quelconque est égal à l'aire d'une section droite multipliée par la distance GG′ *des centres de gravité des bases.*

Fig 50



Soit AB la section droite du cylindre. On aura :

$$\text{vol. ABEF} = \text{surf. AB} \times G'G;$$
$$\text{vol. ABCD} = \text{surf. AB} \times G'G'';$$

et par conséquent :

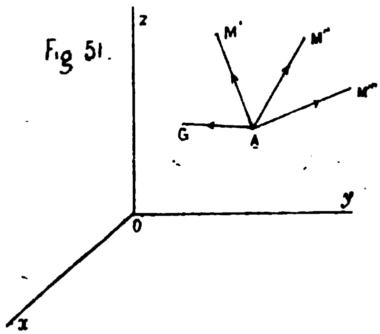
$$\text{vol. CDEF} = \text{surf. AB} \times GG''.$$

§ V. — *Quelques propriétés du centre de gravité.*

75. Problème. — Soient M′, M″, M‴... les centres de gravité de plusieurs corps, de poids p', p'', p'''... dont la somme est P, A un point auquel on applique des forces dirigées suivant les droites AM′, AM″, AM‴ et égales respectivement à : p'AM′, p''AM″, p'''AM‴... On demande de prouver : 1° que la résultante des forces passe par un point fixe, quel que soit le point A; 2° de trouver ce point fixe; 3° de donner une expression simple de la résultante.

Soient :

Fig 51.



x', y', z' les coordonnées de M′
x'', y'', z'' — de M″
x''', y''', z''' — de M‴
α, β, γ — de A

Décomposons chacune des forces en trois autres parallèles à Ox, Oy, Oz; la composante parallèle à Ox de la force dirigée suivant AM′ sera :

$$p'.\,\mathrm{AM}' \times \cos(\mathrm{AM}', x) = p'.\,\mathrm{AM}' \frac{(x'-\alpha)}{\mathrm{AM}'} = p'(x'-\alpha).$$

Soient : X, Y, Z les composantes de la résultante; on aura :

$$\mathrm{X} = \sum p'x' - \alpha \sum p' = \sum p'x' - \mathrm{P}\alpha,$$
$$\mathrm{Y} = \sum p'y' - \mathrm{P}\beta,$$
$$\mathrm{Z} = \sum p'z' - \mathrm{P}\gamma.$$

Or, si x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées du centre de gravité des corps M′, M″... on a :

$$\sum \mathrm{P}'x' = \mathrm{P}x_1; \quad \sum \mathrm{P}'y' = \mathrm{P}y_1; \quad \sum \mathrm{P}'z' = \mathrm{P}z_1.$$

On peut donc écrire :

$$(1) \quad \mathrm{X} = \mathrm{P}(x_1-\alpha); \quad \mathrm{Y} = \mathrm{P}(y_1-\beta); \quad \mathrm{Z} = \mathrm{P}(z_1-\gamma),$$

et les équations de la résultante seront :

$$\frac{x-\alpha}{x_1-\alpha} = \frac{y-\beta}{y_1-\beta} = \frac{z-\gamma}{z_1-\gamma}.$$

On voit que cette résultante passe constamment par le centre de gravité G (x_1, y_1, z_1) quels que soient α, β, γ, c'est à dire quel que soit le point A. Désignons par R cette résultante, on aura :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

ou par les équations (1) :

$$R = P\sqrt{(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2} = P \times AG.$$

Dans le cas où le point A coïncide avec le point G, on a le théorème de Leibnitz :

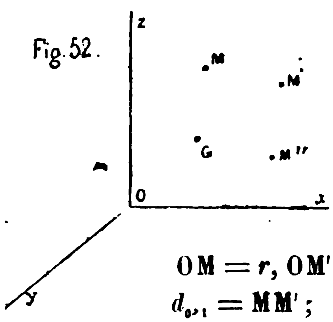
Si on applique au point G *des forces dirigées suivant* GM', GM''... *et égales respectivement à* p' GM', p'' GM''... *toutes ces forces se font équilibre.*

76. Applications. — Il y a équilibre entre trois forces appliquées au centre de gravité d'un triangle et représentées en grandeur et en direction par les droites qui vont de ce point aux trois sommets.

Il y a équilibre entre quatre forces appliquées au centre de gravité d'un tétraèdre et représentées en grandeur et en direction par les droites qui vont de ce point aux quatre sommets.

77. Propriété remarquable du centre de gravité d'un système de points matériels pesants. — Soient : les corps M, M', M''... dont les poids p, p', p''... ont une somme P, G leur centre de gravité, O un point quelconque. Posons :

Fig. 52.



$$OM = r,\ OM' = r',\ OM'' = r''... \qquad OG = R,$$
$$d_{0,1} = MM';\quad d_{0,2} = MM''... \quad d_{1,2} = M'M''...$$

On a, en désignant par X, Y, Z les coordonnées du point G :

$$\left\{\begin{aligned} PX &= px + p'x' + p''x'' + \ldots \\ PY &= py + p'y' + p''y'' + \ldots \\ PZ &= pz + p'z' + p''z'' + \ldots \end{aligned}\right.$$

d'où :

$$\begin{aligned}(1)\ P^2R^2 = p^2r^2 + p'^2r'^2 + p''^2r''^2 \ldots &+ 2pp'\ (xx' + yy' + zz'), \\ &+ 2pp''\ (xx'' + yy'' + zz''), \\ &+ 2p'p''\ (x'x'' + y'y'' + z'z''), \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Or, on a aussi :

$$\begin{aligned} d_{0,1}^2 &= r^2 + r'^2 - 2\,(xx' + yy' + zz'), \\ d_{0,2}^2 &= r^2 + r''^2 - 2\,(xx'' + yy'' + zz''), \\ d_{1,2}^2 &= r'^2 + r''^2 - 2\,(x'x'' + y'y'' + z'z''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

On peut tirer de là les valeurs des quantités $xx' + yy' + zz' \ldots$ et les porter dans (1); on trouvera :

$$P^2R^2 = P\,(pr^2 + p'r'^2 + p''r''^2 + \ldots) - [pp'\,d_{0,1}^2 + pp''\,d_{0,2}^2 + p'p''\,d_{1,2}^2 + \ldots]$$

Cette formule donne la distance R du centre de gravité G à un point quelconque O en fonction des distances des points M, M' à ce point O et des distances mutuelles de ces points.

De l'équation précédente on déduit :

$$(2)\ pr^2 + p'r'^2 + p''r''^2 + \ldots = PR^2 + \frac{1}{P}\,[pp'\,d_{0,1}^2 + pp''\,d_{0,2}^2 + p'p''\,d_{1,2}^2 + \ldots]$$

Quand le point O varie, on voit que :

$$pr^2 + p'r'^2 + p''r''^2 = PR^2 + \text{Const.}$$

Donc le minimum de :

$$pr^2 + p'r'^2 + p''r''^2 + \ldots$$

a lieu pour $R = 0$, c'est à dire pour le centre de gravité. Donc le centre de gravité jouit de cette propriété que :

La somme des carrés de ses distances aux points donnés *multipliées respectivement par les poids de ces points est un minimum.*

Si le point O se meut sur une sphère ayant pour centre le point G, la quantité

$$pr^2 + p'r'^2 + \dots$$

reste constante.

Si $p = p' = p''$ ... et si $R = 0$, l'équation (2) donne en désignant par n le nombre des points :

$$d_{0}^{2},_{1} + d_{0}^{2},_{2} \dots + d_{1}^{2},_{2} + \dots = n\,[r^2 + r'^2 + \dots]$$

Donc : *La somme des carrés des distances mutuelles des centres de gravité de n poids égaux est égale à n fois la somme des carrés des distances de ces points au centre de gravité de l'ensemble.*

CHAPITRE IV

DES COUPLES

78. Définitions. — Nous avons déjà donné la définition du couple. On appelle bras de levier d'un couple la perpendiculaire commune AB aux deux forces du couple, moment du couple le produit $P \times AB$, de l'une des forces par son bras de levier. Ce que nous aurons à dire des couples en statique sera indépendant de l'effet que produisent les couples sur les corps. Mais, quand on voudra se faire une idée des sens respectifs de différents couples, situés dans le même plan, on pourra supposer que les milieux de leurs bras de levier sont fixes; alors, l'effet de chaque couple sera de faire tourner le corps autour du milieu de son bras de levier, et l'on pourra distinguer le sens des couples, en distinguant les couples qui tendent à faire tourner dans un sens d'avec ceux qui tendent à faire tourner en sens contraire.

79. Translation des couples. — Nous allons donner pour les couples un théorème analogue à celui que nous avons donné pour la translation d'une force en un point quelconque de sa direction.

Théorème. — *Un couple quelconque peut être transporté où l'on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra dans ce plan, sans* *que son effet sur le corps auquel il est appliqué soit changé, pourvu qu'on suppose le nouveau bras de levier invariablement attaché au premier.*

Divisons la démonstration en deux parties; supposons d'abord le nouveau bras de levier parallèle à l'ancien.

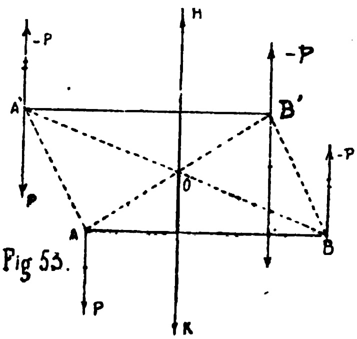
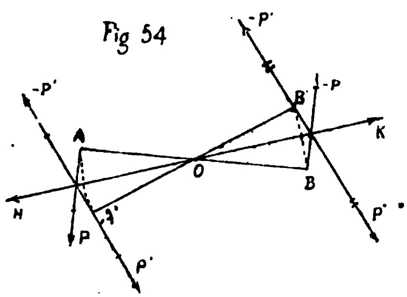


Fig 53.

Soit AB le bras de levier du premier couple; je dis qu'on peut lui donner pour bras de levier A′B′ égal et parallèle à AB. Nous ne changerons rien aux conditions dans lesquelles se trouve le corps si nous appliquons à A′ et B′ des forces égales et contraires à P, puisque ces forces se détruisent deux à deux. Mais les forces — P appliquée en A′ et — P appliquée en B ont une résultante OH = — 2P appliquée en O; les forces P appliquée en A et P appliquée en B′ ont une résultante OK = 2P; OK et OH se détruisent et il reste le couple P, — P appliqué sur le bras de levier A′B′.

Fig 54



En second lieu, faisons tourner le bras de levier dans le plan du couple. Supposons que les deux bras de levier se coupent en leurs milieux respectifs.

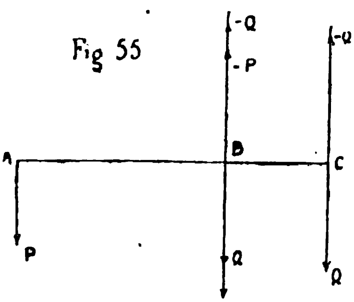
J'applique aux points A′ et B′ deux forces égales et contraires à P. Les forces P, — P appliquées en B′ et en B ont une résultante dirigée suivant OK, bissectrice de l'angle BOB′. Les forces P, — P appliquées en A et en A′ ont une résultante dirigée suivant OH, bissectrice de l'angle AOA′; ces deux résultantes se détruisent, et il reste le couple P, — P ayant pour bras de levier A′B′.

80. Théorème — *Un couple peut être remplacé par un autre couple de bras de levier différent, pourvu que leurs moments soient égaux.*

On peut remplacer le couple (P, — P) ayant pour bras de levier AB par le couple (Q, — Q) ayant pour bras de levier BC, pourvu que l'on ait :

$$P \times AB = Q \times BC.$$

Fig 55



Supposons d'abord que nous n'ayons que le couple (P, — P) ayant pour bras de levier AB. Appliquons en B et en C deux forces égales et contraires à Q. Les deux forces — P et — Q appliquées en B ont une résultante — (P + Q) appliquée en ce point. Les deux forces P et Q appliquées en A et C ont une résultante P + Q qui sera appliquée en B si on a :

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AB}, \quad \text{ou :} \quad P \times AB = Q \times BC.$$

Cette résultante détruira la première et il ne restera plus que le couple Q, — Q ayant pour bras de levier BC.

Composition des couples situés dans un même plan ou dans des plans parallèles.

81. Théorème — *Deux couples situés dans un même plan ou dans des plans parallèles se composent en un seul situé dans un plan parallèle aux plans des couples donnés et dont le moment est égal à la somme ou à la différence des moments des couples donnés.*

Soient : (P, — P), (Q, — Q) les couples donnés dont les bras de levier sont p et q. Nous pouvons les remplacer par deux autres : $(P', -P')$, $(Q', -Q')$ ayant le même bras de levier a, pourvu que l'on ait :

$$Pp = P'a, \quad Qq = Q'a.$$

Ces deux couples ayant même bras de levier se composent en un seul $[P' + Q', -P' - Q']$ s'ils sont de même sens et $[P' - Q', -(P' - Q')]$ s'ils sont de sens contraires. Dans le premier cas, le moment du couple résultant sera :

$$(P' + Q')\,a = Pp + Qq;$$

dans le deuxième :

$$(P' - Q')\,a = Pp - Qq.$$

Le théorème est donc démontré.

On peut dire que : *Le moment du couple résultant est égal à la somme algébrique des moments des couples.*

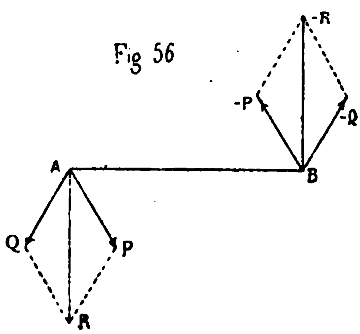
Le théorème s'étend de lui-même à un nombre quelconque de couples.

On voit que, pour la généralité du théorème, nous regardons comme positifs les moments des couples qui tendent à faire tourner leur bras de levier dans un certain sens, et comme négatifs ceux qui tendent à le faire tourner en sens contraire.

Composition des couples situés dans des plans quelconques.

82. On peut d'abord remplacer les deux couples par deux équivalents $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ ayant un même bras de levier AB dirigé suivant l'intersection des deux plans, et ayant des moments égaux à ceux des couples donnés. Les forces P et Q se composeront en une seule R; il en est de même des forces $-P$, $-Q$ qui se composeront en une seule $-R$.

Fig 56



Les deux couples donnés seront donc remplacés par le couple (R, — R).

Les moments des trois couples sont :

$$P \times AB; \quad Q \times AB; \quad R \times AB.$$

Ils sont donc entre eux comme P, Q, R.

Donc :

Si l'on mène dans les plans de deux couples donnés deux droites AP, AQ *perpendiculaires à l'intersection de ces plans et proportionnelles aux moments de ces couples, la diagonale* AR *du parallélogramme construit sur* AP *et* AQ *représentera en grandeur le moment du couple résultant, dont le plan passera par cette diagonale et par l'intersection des plans des deux couples donnés.*

On pourra donc toujours réduire à un seul tant de couples que l'on voudra agissant sur un corps, en les composant deux à deux.

83. RÉCIPROQUEMENT. — On peut toujours décomposer un couple en deux autres situés dans des plans donnés, pourvu que ces plans et celui du couple proposé se rencontrent suivant une même droite, ou suivant des droites parallèles.

Soient en effet DAH le plan du couple donné, CAH et BAH les plans qui doivent contenir les couples composants; menons dans ces trois plans les droites AB, AC, AD perpendiculaires à AH; prenons AD égal au moment du couple donné, et construisons le parallélogramme ABCD; AC et AB seront les moments des couples composants, lesquels couples seront dès lors déterminés.

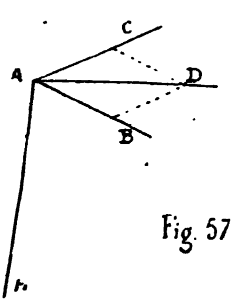


Fig. 57

On peut encore opérer comme il suit :

Soit OH l'intersection de nos trois plans; menons un plan quelconque qui coupe ces plans suivant les droites OX, OY, OU; nous pourrons tourner le couple donné dans son plan de manière que l'une des forces P soit dirigée suivant OH, alors l'autre force rencontrera OU en D, construisant le parallélogramme OABD.

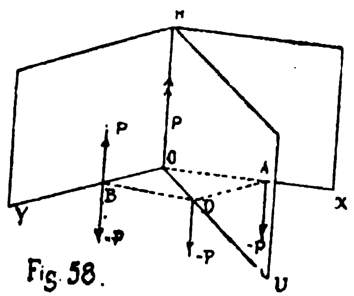


Fig. 58.

Appliquons en B deux forces égales et contraires P', — P, ce qui ne change rien. Alors, nous avons le couple (P, — P) appliqué suivant BO, et le couple (P, — P) appliqué suivant BD. Ce dernier couple peut être transporté parallèlement à lui-même dans le plan HX, et on peut lui donner pour bras de levier OA; les deux couples composants seront donc appliqués, l'un sur OA, l'autre sur OB, et la décomposition est faite.

Si le plan XOY a été mené perpendiculaire à OH, les lignes OA, OB, OD seront proportionnelles aux moments des couples, et on a une nouvelle démonstration du théorème relatif à la composition des couples.

Expression plus simple des théorèmes qui concernent la composition des couples.

84. On peut faire connaître entièrement tout ce qu'il est nécessaire de connaître dans un couple, en opérant comme il suit : Soit AB le bras de levier d'un couple situé dans le plan MN; élevons au point A une perpendiculaire à ce plan, et portons sur cette perpendiculaire une longueur AI égale au moment du couple; cette quantité AI, envisagée tant au

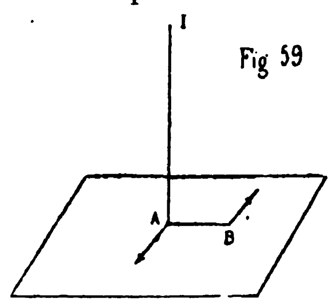


Fig 59

point de vue de la direction que de la grandeur, sera dite l'axe du couple. Il reste encore à déterminer de quel côté du plan MN la perpendiculaire doit être élevée; nous la mènerons d'un côté tel que : pour un observateur couché le long de AI, les pieds en A, la tête en I, le couple tende à faire tourner son bras de levier AB autour du point A, dans un sens déterminé, dans le sens direct par exemple. Il est visible que, quand la quantité géométrique AI sera donnée, le couple sera entièrement déterminé, pour son plan, son sens et son moment. Enfin la quantité AI peut être transportée parallèlement à elle-même où on voudra. Quand on aura à s'occuper de plusieurs couples, on mènera les axes de ces couples à partir d'un même point, d'ailleurs arbitraire.

La considération des axes des couples rend les énoncés relatifs à la composition des couples entièrement semblables à ceux qui se rapportent à la composition des forces. On voit d'abord que :

Pour composer des couples dont les axes sont parallèles, il suffit de transporter en un même point tous ces axes qui sont alors en ligne droite, de faire la somme de tous ceux qui sont du même côté de l'origine commune, et de retrancher la plus petite somme de la plus grande; ce qui restera représentera en grandeur l'axe du couple résultant, dont la direction sera celle de la plus grande somme.

On peut simplifier encore cet énoncé et considérer comme positifs les axes dirigés dans un sens, comme négatifs ceux dirigés en sens contraire, et dire que l'axe du couple résultant est représenté en grandeur et en direction par la somme algébrique des axes des couples composants.

La composition des couples dans ce cas est donc identique à celle des forces agissant suivant la même droite.

85. Supposons maintenant que les deux couples ne soient pas dans le même plan.

Soient les deux couples donnés (P, — P), (P′, — P′), ayant le couple (R, — R) pour couple résultant; menons au point A un plan perpendiculaire sur AB, et dans ce plan faisons tourner le parallélogramme APRP′ d'un angle de 90°, il viendra en ADEC; les droites AC, AD, AE seront les axes des couples, car 1° ces droites sont perpendiculaires aux plans des couples; 2° ces axes sont dirigés dans le sens convenable; il aura suffi en effet de faire tourner de 90° dans un sens tel qu'un observateur placé suivant AD, les pieds en A, la tête en D, voie le couple (P, — P) faire tourner dans le sens direct; alors il en sera de même pour les deux autres axes; 3° les longueurs AD, AC, AE sont proportionnelles aux moments des couples, car elles sont égales à AP, AP′, AR qui sont elles-mêmes proportionnelles à ces moments. On peut donc dire que :

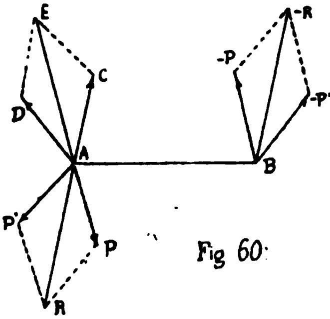


Fig 60.

Deux couples situés dans des plans différents se composent en un seul dont l'axe est représenté en grandeur, direction et sens par la diagonale du parallélogramme construit sur leurs axes.

86. Pour composer autant de couples qu'on voudra, on aura des théorèmes tout à fait analogues à ceux qui concernent les forces; nous signalerons particulièrement le suivant à cause de l'usage que nous en ferons.

Trois couples dont les axes sont représentés en grandeur et en direction par les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède, se composent en un seul dont l'axe a pour grandeur, direction et sens la diagonale de ce parallélipipède.

Lorsque le parallélipipède est rectangulaire, en appelant G l'axe du couple résultant, L, M, N les axes des couples composants, λ, μ, ν les angles que l'axe G fait avec les axes coordonnées, on a :

$$L = G \cos \lambda; \quad M = G \cos \mu; \quad N = G \cos \nu.$$

$$\left\{\begin{array}{c} G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \\ \cos \lambda = \dfrac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}; \quad \cos \mu = \dfrac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}; \\ \cos \nu = \dfrac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}. \end{array}\right.$$

On trouvera de même les expressions analytiques du moment du couple résultant, et des angles que fait son axe avec trois directions rectangulaires, lorsque les couples composants seront en nombre quelconque.

87. Conditions d'équilibre des couples. — Si les couples sont situés dans des plans parallèles, la condition nécessaire et suffisante pour leur équilibre est que la somme algébrique de leurs moments soit nulle.

Si les axes des couples ne sont pas parallèles, il faudra, d'après l'identité de la composition des axes avec celle des couples, que les sommes algébriques des projections des axes sur trois droites formant un angle trièdre soient nulles séparément.

Si tous les axes sont dans un même plan, il suffira que les sommes algébriques des projections de ces axes soient nulles relativement à deux droites non parallèles situées dans ce plan; dans ce cas, les plans de tous ces couples sont perpendiculaires à un même plan.

CHAPITRE V

COMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE.

§ I. — *Étude géométrique.*

88. THÉORÈME. — *Un système quelconque de forces appliqué à un solide invariable peut toujours, et d'une infinité de manières, être remplacé par une force unique et un couple unique.*

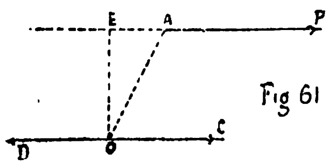


Fig 61

Soit O un point du corps solide, ou un point pris en dehors mais relié d'une manière invariable au corps; soit AP l'une quelconque des forces; au point O j'applique deux forces égales contraires OC et OD dont la direction soit parallèle à AP, et l'intensité commune égale à AP. Ces deux forces se détruisent et ne changent rien à l'état du corps; mais les forces AP et OD forment un couple, et la force OC est la force AP transportée parallèlement à elle-même en O. On peut donc dire qu'*une force* P *appliquée en un point* A *d'un solide invariable peut être transportée parallèlement à elle-même en un point* O *du même solide, pourvu qu'on adjoigne à cette force ainsi transportée un couple situé dans un plan parallèle au plan* AOP, *et ayant pour moment le produit de cette force par la distance du point* O *à la direction de la force.*

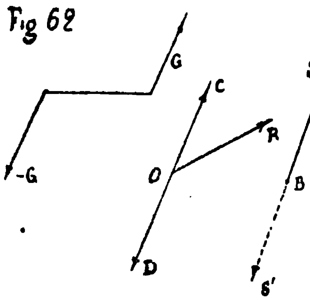
Opérons de même pour toutes les forces appliquées au corps solide; toutes les forces appliquées en O se composeront en une seule R; tous les couples pourront de même être remplacés par un couple unique G. Le théorème est donc démontré.

Or, un couple ne peut être détruit par une force; il faut donc pour l'équilibre que la force et le couple soient séparément nuls. Ces conditions, qui sont nécessaires, sont évidemment suffisantes; chacune de ces conditions s'exprime en général par trois équations, l'équilibre du système sera donc exprimé par six équations.

89. Condition pour qu'il y ait une résultante unique. — Toutes les forces qui agissent sur le solide rigide étant ramenées à une force et à un couple, si la force et le couple ne sont pas nuls séparément, il n'y aura pas équilibre; on peut se demander dans quel cas le système admettra une résultante unique.

Supposons donc que la force R et le couple G, — G aient une résultante unique BS; soit BS' égale et contraire à BS; cette force BS' devra faire équilibre à la force R et au couple G, — G. Transportons la force BS' au point O, ce qui nous donnera la force OD et le couple BS', OC. Les deux forces OR, OD ont une résultante; cette résultante devra être nulle; les deux couples se composent en un seul qui devra être nul. Donc tout d'abord, les deux forces OR, OD devront être égales et opposées. Ainsi la force BS' doit être parallèle à R; il en résultera que le plan du couple BS', OC sera parallèle à R; mais pour que ce couple détruise le couple G, — G, il faut que les plans des deux

Fig 62



couples soient parallèles; donc, pour que l'équilibre ait lieu, il est nécessaire que la force R soit parallèle au plan du couple G, — G.

Cette condition qui est nécessaire est en même temps suffisante, car on pourra transporter le plan du couple parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il passe par OR, et faire même que l'une des forces s'applique sur OR; on aura alors dans un même plan les forces R et G agissant suivant la même droite, et la force — G parallèle à cette droite; les deux premières ont une résultante R + G qui, combinée avec la force — G, donnera la résultante R.

Ainsi la condition énoncée suffit pour que le système admette une résultante, et cette résultante est alors égale et parallèle à R.

Il faut toutefois excepter le cas où $R = 0$; alors il ne peut y avoir de résultante unique, puisque toutes les forces se réduisent au couple G, — G.

90. Remarque. — Lorsque la force R n'est pas parallèle au plan du couple G, — G, il n'y a jamais de résultante unique; seulement on peut, en transportant le couple G, — G parallèlement à lui-même, amener la force G à rencontrer R; alors R et G ont une résultante T, et toutes les forces du système sont réduites à deux autres, T et — G, non situées dans le même plan.

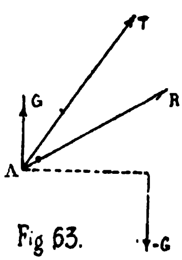


Fig 63.

Cette réduction peut avoir lieu, d'une infinité de manières, en déplaçant le point A sur la force R, et même, sans déplacer le point A, en tournant le couple dans son plan et même en le transformant en un autre équivalent. Nous verrons plus tard ce qu'ont de commun tous ces systèmes de deux forces auxquels on peut toujours réduire le système proposé.

§ II. — *Expressions analytiques des conditions d'équilibre, et de la résultante lorsqu'elle existe.*

Nous allons résoudre plusieurs questions simples avant d'aborder le problème général.

91. Équilibre des forces parallèles situées dans le même plan. — Soit P l'une des forces. Transportons chacune des forces P en un point quelconque O du plan en ajoutant un couple. La somme algébrique des forces devant être nulle ainsi que la somme algébrique des moments des couples, nous aurons les deux équations d'équilibre :

$$\sum P = 0, \quad \sum Pp = 0,$$

p désignant le bras de levier de l'un des couples. On peut donc dire que :

La somme algébrique des forces doit être nulle, ainsi que la somme algébrique de leurs moments, par rapport à un point quelconque O *du plan.*

92. Remarque. — Si les forces ne se font pas équilibre, elles se réduiront à une force et à un couple qui, étant situés dans un même plan, auront une résultante unique. Soit R la résultante, r sa distance au point O affecté du signe convenable; la force — R appliquée au même point devra tenir toutes les autres en équilibre; on aura donc, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} P' + P'' + \dots - R &= 0, \\ P'p' + P''p'' + \dots - Rr &= 0; \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} R &= P' + P'' + \dots \\ Rr &= P'p' + P''p'' + \dots \end{aligned}$$

Ces formules déterminent la grandeur et la position de la résultante.

Si la force R était nulle, le système se réduirait à un couple et n'aurait pas de résultante.

93. Équilibre des forces parallèles non situées dans un même plan. — Je mène deux plans parallèles aux forces, et un troisième qui coupe les deux premiers suivant deux droites Ox, Oy; l'intersection des deux plans sera la droite Oz parallèle aux forces.

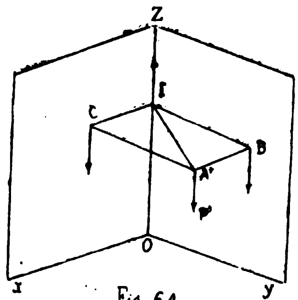


Fig. 64.

Soit A'P' l'une des forces; je mène par A' un plan parallèle au plan xOy qui coupe OZ en I, et je construis le parallélogramme A'BIC dont les côtés sont parallèles à Ox et Oy. Je peux transporter la force P' en I en introduisant le couple (P', — P') appliqué suivant A'I; on sait que ce couple peut se décomposer en deux autres ayant les mêmes forces P', — P', et appliqués suivant IB et IC; les moments de ces couples sont, en désignant par x' et y' les deux coordonnées du point A' parallèles aux axes Ox, Oy :

$$P' \times IB \sin(y, z) = P'y' \sin(y, z),$$
$$P' \times IC \sin(x, z) = P'x' \sin(x, z).$$

On aura donc en définitive :

1° la force : $\sum P'$ agissant suivant OZ;

2° le couple : $\sin xz \sum P'x'$ agissant dans le plan ZOx;

3° le couple : $\sin yz \sum P'y'$ agissant dans le plan ZOy.

Ces deux derniers couples se composeront en un seul qui devra être nul, et qui ne pourra l'être que si les deux couples composants le sont. Ainsi les trois conditions d'équilibre sont :

$$\sum P' = 0; \quad \sum P'x' = 0, \quad \sum P'y' = 0,$$

qu'il est facile de traduire en langage ordinaire.

Remarque. — Si les forces ne se font pas équilibre, elles auront en général une résultante unique R pour laquelle x et y deviendront x_1 et y_1, et l'on aura :

$$R = \sum P'; \quad Rx_1 = \sum P'x'; \quad Ry_1 = \sum P'y'.$$

94. Équilibre des forces agissant dans un plan. — La force et le moment du couple auxquels on peut réduire toutes les forces devront être séparément nuls. On devra donc avoir les deux équations :

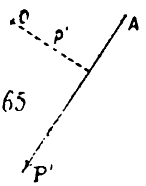


Fig 65

$$R = 0; \quad \sum P'p' = 0.$$

L'équation $R = 0$ se décompose en deux autres :

$$\sum X' = 0; \quad \sum Y' = 0.$$

Si ces conditions ont lieu relativement à un point particulier et à deux directions spéciales, l'équilibre a lieu, et les mêmes conditions auront lieu par rapport à tous les points et à tous les axes possibles pris dans le plan des forces.

Dans l'équation :

$$\sum P'p' = 0,$$

il faudra distinguer les moments des forces qui agissent dans un sens, d'avec les moments de celles qui agissent en sens contraire, et leur donner des signes différents; mais on peut mettre cette condition sous une autre forme où les signes s'introduiront d'eux-mêmes.

Avant de transporter chaque force au point O, décomposons-la en deux autres, agissant suivant des parallèles à Ox et Oy, et transportons séparément les deux composantes.

Nous aurons, pour les moments des couples avec leurs signes :

$$x'Y' \sin(x,y); \qquad -y'X' \sin(x,y).$$

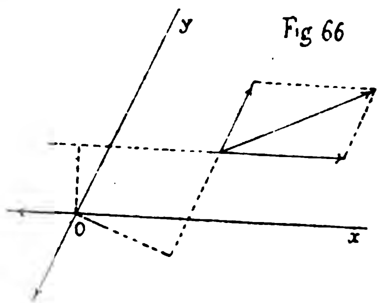


Fig 66

Le moment du couple résultant sera donc :

$$\sin(x,y) \sum (x'Y' - y'X').$$

On aura donc les trois équations d'équilibre :

$$\sum X' = 0; \quad \sum Y' = 0;$$
$$\sum (x'Y' - y'X') = 0.$$

Dans le cas où les axes Ox, Oy sont rectangulaires, en désignant les intensités des forces par P', P''... (quantités, que l'on regardera comme essentiellement positives), par α', α''... les angles que font les directions des forces avec Ox; ces équations deviendront :

$$\sum P' \cos\alpha' = 0, \quad \sum P' \sin\alpha' = 0, \quad \sum P'(x' \sin\alpha' - y' \cos\alpha').$$

95. Exercices. — 1° *Des forces sont appliquées aux milieux des côtés d'un polygone convexe, perpendiculairement à ces côtés. Ces forces sont proportionnelles aux côtés. Démontrer qu'elles se font équilibre. (Ces forces sont supposées toutes dirigées soit vers l'intérieur du polygone, soit vers l'extérieur.)*

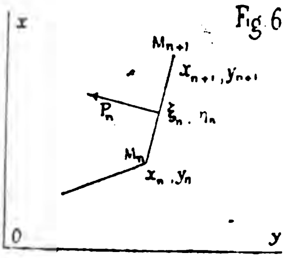


Fig. 67

Prenons deux axes rectangulaires; soit α_n l'angle de M_nM_{n+1} avec Ox; celui de P_n sera $\alpha_n + 90°$, et l'on aura :

$$y_{n+1} - y_n = c_n \sin\alpha_n,$$
$$x_{n+1} - x_n = c_n \cos\alpha_n,$$

c_n désignant la longueur M_nM_{n+1}.

On aura en outre :

$$\xi_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \quad \eta_n = \frac{y_n + y_{n+1}}{2},$$

$$P_n = Kc_n,$$

$$X_n = P_n \cos(\alpha_n + 90^\circ) = - P_n \sin \alpha_n = - K (y_{n+1} - y_n),$$
$$Y_n = P_n \sin(\alpha_n + 90^\circ) = \quad P_n \cos \alpha_n = \quad K (x_{n+1} - x_n).$$

On a évidemment :

$$\sum (y_{n+1} - y_n) = 0, \quad \sum (x_{n+1} - x_n) = 0;$$

donc déjà :

$$\sum X_n = 0, \quad \sum Y_n = 0.$$

Reste à voir si la troisième condition d'équilibre, celle des moments, est satisfaite.

$$X_n \eta_n - Y_n \xi_n = - \frac{K}{2} (y^2_{n+1} - y^2_n) - \frac{K}{2} (x^2_{n+1} - x^2_n).$$

Or :

$$\sum (y^2_{n+1} - y^2_n) = 0; \quad \sum (x^2_{n+1} - x^2_n) = 0;$$

donc :

$$\sum (X_n \eta_n - Y_n \xi_n) = 0.$$

Ainsi les trois conditions de l'équilibre sont vérifiées; donc l'équilibre existe.

96. 2° *Considérons le même polygone. A chaque sommet nous appliquons une force dirigée suivant l'un des côtés qui aboutit à ce sommet, et proportionnelle à la longueur de ce côté, en allant toujours dans le même sens. Démontrer que ces forces ne se font pas équilibre, mais se réduisent à un couple.*

On a :

$$P_n = Kc_n, \quad X_n = P_n \cos \alpha_n, \quad Y_n = P_n \sin \alpha_n.$$

Comme dans le problème précédent :

$$\sum X_n = 0; \quad \sum Y_n = 0.$$

La somme des moments des forces relativement à un point intérieur est :

$$\sum P_n p_n = \text{aire du polygone} \times 2K;$$

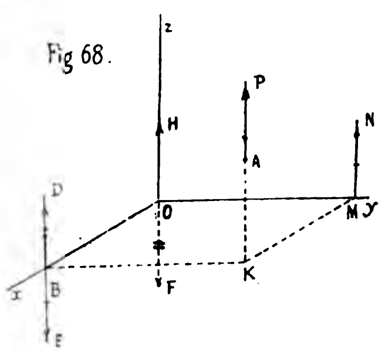
elle est donc différente de zéro.

Développement des équations de l'équilibre dans le cas général.

97. Nous supposerons, pour plus de généralité, les axes obliques, et nous prendrons pour origine le point arbitraire O où nous transportons les forces.

Soient P l'une des forces appliquées au solide, A son point d'application, x, y, z les coordonnées de ce point, X, Y, Z les composantes de la force P suivant des parallèles à Ox, Oy, Oz menées par le point A. Au lieu de transporter la force P au point O, nous allons transporter successivement ses trois composantes. Nous regarderons comme positif le moment d'un couple situé dans le plan xOy, lorsqu'il tendra à faire tourner son bras de levier de x vers y, les couples situés dans les plans des yz et des zx seront de même considérés comme ayant des moments positifs quand ils tendront à faire tourner leurs bras de levier de y vers z et de z vers x. Nous nous occuperons d'abord de ce qui arrive pour l'une des composantes, $AP = Z$ par exemple. Supposons d'abord x, y, z positifs; soit OB l'x du point A; en B et O appliquons respectivement deux forces $+ Z$ et $- Z$, égales et

Fig 68.



de sens contraires à la composante Z appliquée en A; ces forces BD et BE d'une part, OH et OF de l'autre, se détruisant mutuellement, ne produisent aucun effet sur le corps solide. Les forces BE et AP forment un couple dont le plan est parallèle à yOz, et qu'on peut transporter parallèlement à lui-même dans le plan yOz; BD et OF forment un autre couple situé dans le plan zOx; enfin OH est la force AP transportée parallèlement à elle-même au point O. On voit qu'on a pu opérer ce transport en faisant intervenir deux couples agissant dans le plan yOz et xOz. Si on avait fait directement le transport, on aurait eu le couple (AP, OF); ce couple est le couple résultant des deux premiers.

Le couple (BE, AP), transporté parallèlement à lui-même dans le plan des yz, devient le couple (OF, MN) et son moment est :

$$Z \times OM \sin yOz = Zy \sin yOz.$$

Le moment du couple (BD, OF) est :

$$Z \times OB \sin zOx = Zx \sin zOx;$$

mais on doit lui donner le signe — d'après nos conventions. Ainsi la force Z étant transportée parallèlement à elle-même en O, donne lieu à deux couples :

$$\begin{array}{lcl} Zy \sin yOz & \text{agissant dans le plan} & yOz, \\ -Zx \sin zOx & — & zOx. \end{array}$$

Nous déduisons de là, par de simples permutations de lettres, que la force X transportée parallèlement à elle-même au point O donne lieu à deux couples :

$$\begin{array}{lcl} +Xz \sin zOx & \text{agissant dans le plan} & zOx, \\ -Xy \sin xOy & — & xOy. \end{array}$$

Y donne enfin les deux couples :

$$\begin{array}{lcl} +Yx \sin xOy & \text{agissant dans le plan} & xOy, \\ -Yz \sin yOz & — & yOz. \end{array}$$

On peut ajouter les moments des couples qui agissent dans un même plan et on arrive à cette conclusion :

La force P donne lieu :

1° *A trois forces* X, Y, Z *appliquées au point* O *et dirigées suivant* Ox, Oy, Oz;

2° *A trois couples agissant dans les trois plans coordonnés et ayant pour moments respectifs* :

$$(yZ - zY)\sin yOz,$$
$$(zX - xZ)\sin zOx,$$
$$(xY - yX)\sin xOy.$$

Il faut remarquer que, quand on fait la permutation des lettres, le sens direct qui était de x vers y, devient de y vers z, puis de z vers x.

Si l'on opère de même pour toutes les forces appliquées au corps solide, on voit que ces forces peuvent être réduites :

A trois forces appliquées au point O, *dirigées suivant les axes* Ox, Oy, Oz *et ayant pour intensités respectives :* $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$;

Et à trois couples agissant dans chacun des plans coordonnés, et ayant pour moments respectifs :

$$\sin yOz \sum (yZ - Zy),$$
$$\sin zOx \sum (zX - xZ),$$
$$\sin xOy \sum (xY - yX).$$

Les trois forces se composent en une force unique R, et les trois couples en un couple unique (G, — G). Pour l'équilibre il faut et il suffit que : *la force* R *soit nulle, ainsi que le couple* (G, — G). Cela donne les six équations d'équilibre :

$$(1) \qquad \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$
$$(2) \quad \sum yZ - zX = 0, \quad \sum zX - xZ = 0, \quad \sum xY - yX = 0.$$

Dans le cas où les axes sont rectangulaires, désignons par α, β, γ les angles que fait avec les axes la direction de la force P, on a :

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta, \quad Z = P\cos\gamma,$$

et les six équations de l'équilibre pourront s'écrire :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \sum P\cos\alpha = 0; \quad \sum P\cos\beta = 0; \quad \sum P\cos\gamma = 0; \\ \sum P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0; \quad \sum P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0; \\ \sum P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0. \end{array} \right.$$

98. 1^re^ REMARQUE. — Dans la démonstration précédente nous avons supposé, pour fixer les idées :

$$Z > 0; \quad x > 0; \quad y > 0; \quad z > 0;$$

et nous avons vu que dans ces conditions le moment du couple (OF, MN) était :

$$Zy \sin yOz.$$

Il est aisé de voir que cela a lieu dans tous les cas; en effet si Z est négatif y étant positif, il est visible que le moment du couple qui doit remplacer (OF, MN) (*fig.* 68) est négatif; or, il en est de même de l'expression $Zy \sin yOz$. De même Z étant positif et y négatif, le moment du couple qui remplace (OF, MN) doit être négatif, et il en est bien ainsi de l'expression $Zy \sin yOz$; on en dirait autant du couple (BD, OF). Donc nos formules ont lieu quels que soient les signes des quantités X, Y, Z; x, y, z; elles sont donc générales.

99. 2^e^ REMARQUE. — Si l'on projette les forces et les points d'application sur chacun des plans coordonnés, on pourra dire que :

Pour l'équilibre, il faut et il suffit que les forces projetées se fassent équilibre sur chacun des plans coordonnés, et réciproquement.

100. Recherche de la résultante unique dans le cas où elle existe. — Soient : X', Y', Z'; X'', Y'', Z'';... les composantes des forces données suivant trois directions rectangulaires ou obliques, X_1, Y_1, Z_1 celles de la résultante si elle existe, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son point d'application. Les six équations de l'équilibre devront avoir lieu, si aux forces données on ajoute une force égale et contraire à la résultante. On aura donc, en posant :

$$\sum X' = X, \quad \sum Y' = Y, \quad \sum Z' = Z,$$

les six équations :

$$X - X_1 = 0, \quad Y - Y_1 = 0, \quad Z - Z_1 = 0,$$
$$\sum (y'Z' - z'Y') - (y_1Z_1 - z_1Y_1) = 0,$$
$$\sum (z'X' - x'Z') - (z_1X_1 - x_1Z_1) = 0,$$
$$\sum (x'Y' - y'X') - (x_1Y_1 - y_1X_1) = 0;$$

ou bien, en posant :

$$\sum (y'Z' - z'Y') = L, \quad \sum (z'X' - x'Z') = M,$$
$$\sum (x'Y' - y'X') = N,$$

(1) $$X_1 - X = 0, \quad Y_1 - Y = 0, \quad Z_1 - Z = 0;$$
(2) $$y_1Z_1 - z_1Y_1 = L, \quad z_1X_1 - x_1Z_1 = M, \quad x_1Y_1 - y_1X_1 = N.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il est nécessaire qu'on puisse satisfaire à ces six équations par des valeurs convenables de X_1, Y_1, Z_1, x_1, y_1, z_1. Les équations (1) donnent d'abord

$$X_1 = X, \quad Y_1 = Y, \quad Z_1 = Z,$$

ce qui exprime que : *Les composantes de la résultante suivant les axes sont les sommes algébriques des composantes des forces données.*

Les équations (2) feront connaître x_1, y_1, z_1, mais elles ne seront pas toujours compatibles. On en déduit en effet :

$$LX_1 + MY_1 + NZ_1 = 0,$$

ou :

$$(3) \qquad LX + MY + NZ = 0,$$

équation entre des quantités données, et qui est une condition nécessaire pour la possibilité de l'équilibre. Elle serait insignifiante si les trois quantités X, Y, Z étaient nulles; mais alors les équations (2) donneront :

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

et le système serait en équilibre avec une résultante nulle.

Ce cas écarté et la condition (3) étant supposée remplie, les équations (2) se réduisent à deux; elles ne peuvent faire connaître x_1, y_1, z_1 toutes les trois; les équations (2) étant du premier degré en x_1, y_1, z_1, sont celles d'une droite dont tous les points pourront être pris comme points d'application de la résultante; ce sont les équations de cette résultante.

101. Comme on a démontré que la condition pour que les forces aient une résultante unique, est que la résultante des forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point soit parallèle au plan du couple résultant, il s'ensuit que l'équation (3) doit exprimer cette condition. C'est ce qu'on vérifie immédiatement dans le cas des axes rectangulaires. Car alors, X, Y, Z sont proportionnels aux cosinus des angles que la résultante de translation fait avec les axes; L, M, N le sont aux cosinus des angles que fait l'axe du couple résultant, et l'équation (3) exprime que la résultante est perpendiculaire à l'axe du couple résultant, et par conséquent parallèle à son plan. Dans le cas des axes obliques, il est moins facile de reconnaître cette signification [1] de l'équation (3).

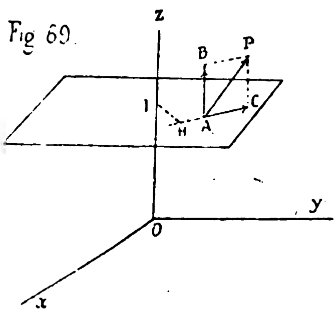
[1] DUHAMEL. — *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 4e partie, pages 71-75.

§ III. — *Théorie des moments. — Identité avec les couples.*

102. Interprétation des trois dernières équations de l'équilibre. — Dans le cas où les axes sont rectangulaires, les trois dernières équations de l'équilibre peuvent être interprétées de la manière suivante :

Soit A un point quelconque de la direction de la force P que nous considérerons comme le point d'application de la force; par ce point menons un plan perpendiculaire sur Oz, rencontrant cette droite au point I. Décomposons la force P en deux autres : l'une AB parallèle à Oz, l'autre $Q = AC$ dans le plan que nous venons de mener. On nomme :

Fig 69.



Moment de la force P *par rapport à* Oz *le moment de la force* Q *par rapport au point* I. Si l'on décompose la force Q en deux autres X, Y agissant parallèlement à Ox et Oy, on a, comme nous l'avons déjà vu :

$$\text{Mom. } Q = \text{mom. } X + \text{mom. } Y,$$
$$\text{mom. } X = -yX,$$
$$\text{mom. } Y = +xY;$$

donc :

$$\text{mom. P relat. à } Oz = xY - yX.$$

Les trois dernières équations de l'équilibre expriment donc que :

Les sommes algébriques des moments de toutes les forces par rapport à trois axes rectangulaires sont nulles séparément.

On peut remarquer que la distance du point I à la force Q n'est autre chose que la distance du point I au plan mené par la force P parallèlement à OZ; c'est donc la plus courte distance de la force P à cet axe. De sorte que : *Le moment d'une force par rapport à un axe est le produit de la plus courte distance de ces deux droites, par la composante de cette force perpendiculaire à l'axe.*

Si γ désigne l'angle de la force P avec Oz, le moment sera en valeur absolue (1) :

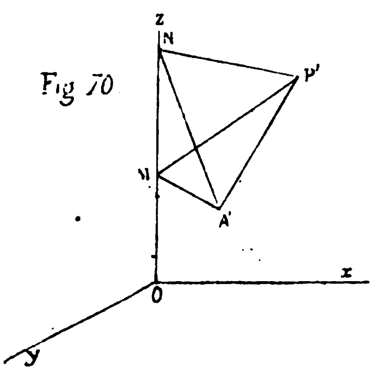
$$Pp \sin \gamma,$$

p désignant la plus courte distance de la force et de l'axe.

Si les axes sont rectangulaires et si p', q', r' désignent les plus courtes distances de la force P aux trois axes, les six équations de l'équilibre pourront s'écrire :

$$\sum P' \cos \alpha' = 0, \qquad \sum P' p' \sin \alpha' = 0,$$
$$\sum P' \cos \beta' = 0, \qquad \sum P' q' \sin \beta' = 0,$$
$$\sum P' \cos \gamma' = 0. \qquad \sum P' r' \sin \gamma' = 0.$$

Fig 70



les termes tels que $P'p' \sin \alpha'$ ayant des signes convenables.

L'équation $\sum P' r' \sin \gamma' = 0$ peut être interprétée géométriquement de la manière suivante :

On peut la mettre sous la forme :

$$\sum P' l\, r' \sin \gamma' = 0,$$

l désignant une longueur quel-

(1) D'après ce qui a été dit dès moments relativement à un point, on verra qu'on a la règle suivante pour déterminer le moment d'une force AP relativement à un axe Oz. On supposera que tout le corps solide, le point A compris, soit attaché à l'axe Oz, autour duquel il ne puisse que tourner; alors la force tendra à faire tourner le corps dans un sens ou dans l'autre. Dans le premier cas on donnera au moment le signe $+$, et le signe $-$ dans le cas contraire.

Le moment $Pp \sin \gamma$ ne peut s'annuler que si $\gamma = 0$, alors la force est parallèle à l'axe; ou $p = 0$, alors la force rencontre l'axe. On voit que dans les deux cas la force et l'axe sont dans un même plan.

conque MN portée sur Oz. Or, un théorème de géométrie nous apprend que le volume d'un tétraèdre construit sur deux droites MN, A'P' est égal au $\frac{1}{6}$ du produit de ces deux arêtes par le sinus de leur angle et leur plus courte distance; donc :

$$P' r' \sin \gamma' = \frac{6}{l} \text{ vol. tétraèd. MN A'P'}.$$

On peut donc dire que :

Si sur les axes on prend trois segments quelconques, les sommes algébriques des volumes des tétraèdres construits sur chacun de ces trois segments et les forces données comme arêtes opposées seront nulles séparément. — Le signe du volume de chaque tétraèdre se déterminera comme le signe du moment de la force A'P' relatif à l'axe Oz.

103. Remarque. — Si l'on transporte la force AP en un point quelconque O de l'axe Oz, on aura un couple résultant de ce transport; nous avons vu que la projection de l'axe de ce couple sur Oz est égale en grandeur et en signe à

$$xY - yX.$$

On peut donc dire que :

Le moment d'une force par rapport à une droite quelconque est égal à l'axe du couple résultant du transport de cette force en un point quelconque de cette droite, projeté sur la direction de cette dernière.

A cause de l'importance de ce théorème, nous allons en donner une démonstration directe.

104. Transportons la force AP au point I; nous aurons un certain couple K (*fig.* 69). Or, on peut transporter d'abord la composante AB, ce qui donnera un couple K', puis la composante AC, ce qui donnera un couple K''. On a donc :

proj. axe de K sur Oz = somme proj. axes de K' et K'' sur Oz.

Or :

$$\text{proj. axe de K' sur } Oz = 0,$$
$$\text{proj. axe de K' sur } Oz = \text{mom. de K'} = Qr;$$

donc :

$$Qr = \text{proj. de l'axe de K sur } Oz.$$

Si l'on a plusieurs forces et qu'on fasse pour chacune une décomposition analogue, en prenant le même point O de la droite pour toutes les forces, la somme des moments des forces relativement à Oz sera égale à la somme des projections sur Oz des axes des couples provenant du transport de chacune des forces au point O ; or, la somme de ces projections est égale à la projection de l'axe du couple résultant. Donc :

THÉORÈME. — *Le moment d'un système de forces par rapport à une droite quelconque s'obtient en projetant sur cette direction l'axe du couple résultant du transport des forces en un point quelconque de cette droite.*

On voit que cette dernière projection doit être constante, bien que l'axe du couple résultant puisse varier, quand on déplace sur la droite le point où l'on transporte les forces.

105. En partant de là, on peut trouver ce que deviennent les trois dernières conditions d'équilibre, lorsque les axes sont obliques.

Soient Ox, Oy, Oz ces trois axes, G le moment du couple résultant, lorsqu'on transporte toutes les forces au point O ; les sommes des moments des forces relativement à chacun des trois axes seront respectivement :

$$G\cos(G, x); \quad G\cos(G, y); \quad G\cos(G, z),$$

elles seront nulles, si l'équilibre a lieu. — Si ces trois quantités sont nulles, on aura $G = 0$, car les trois cosinus ne peuvent être nuls en même temps.

On a donc ce théorème :

Pour que des forces en nombre quelconque se fassent équilibre sur un solide invariable, il faut et il suffit, relativement à trois axes obliques Ox, Oy, Oz, que la somme algébrique des composantes des forces suivant chaque axe soit nulle, et que la somme algébrique de leurs moments par rapport à chacun des axes soit nulle séparément.

106. Équilibre de trois forces. — Soit A'B une droite rencontrant deux des forces P' et P''; la somme des moments des trois forces par rapport à cette droite devra être nulle; les moments de P' et P'' sont nuls d'eux-mêmes; celui de P devra être nul; donc P rencontre A'B ou lui est parallèle. On démontrera la même chose pour une nouvelle droite quelconque telle que A'C. On voit donc que la force P doit être tout entière dans le plan mené par P'' et le point A'; P et P'' sont dans un même plan qui, devant contenir en outre un point quelconque A' de la force P', la contient tout entière; donc les trois forces doivent être dans un même plan.

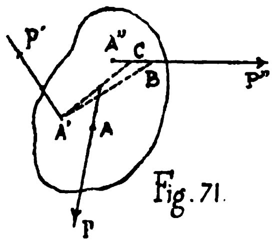


Fig. 71.

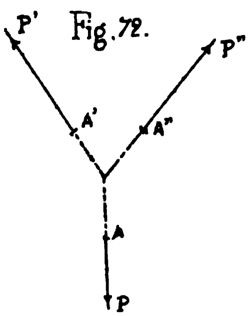


Fig. 72.

Si les forces P et P' ne sont pas parallèles, mais se coupent en un point O, la force P'' qui est égale et opposée à la résultante de P et P' ira passer par ce point, et on a, comme on l'a déjà vu, les relations :

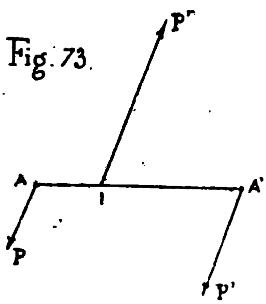
$$\frac{P}{\sin(P', P'')} = \frac{P'}{\sin(P, P'')} = \frac{P''}{\sin(P, P')},$$

qui constituent alors les conditions d'équilibre.

Si les forces sont parallèles, on aura les relations :

$$\frac{P}{IA'} = \frac{P'}{IA} = \frac{P''}{AA'} \quad \text{avec} \quad P'' = P + P'.$$

Fig. 73.



On déduit de là immédiatement que deux forces non situées dans le même plan n'ont pas de résultante.

107. Équilibre de quatre forces. — *Lorsque quatre forces appliquées à un solide invariable se font équilibre, ces forces sont situées sur une surface réglée du second ordre.*

Soient les forces P, P', P'', P''', il y a une infinité de droites D, D', D'',... rencontrant trois des forces P, P', P''; le lieu de la droite D est une surface du second ordre (hyperboloïde à une nappe, ou paraboloïde hyperbolique). La somme des moments des quatre forces relativement à chaque droite D doit être nulle; or les moments de P, P', P'' sont nuls, donc relativement à chaque droite D le moment de P''' doit être nul. La force P''' doit donc rencontrer chaque droite D ou lui être parallèle, et comme elle ne peut être parallèle à toutes les droites D, elle doit les rencontrer toutes. Les quatre forces P, P', P'', P''' sont donc des génératrices d'un même système de la surface S.

La surface sera généralement un hyperboloïde à une nappe, elle sera un paraboloïde si trois des quatre forces sont parallèles à un même plan.

108. Somme des moments des forces par rapport aux droites qui passent en un même point. — Le transport de toutes les forces en ce point donne lieu à un couple résultant; et son axe projeté sur une droite quelconque passant par ce point, donnant la mesure du moment du système des forces données relativement à cette droite, il en résulte les conséquences suivantes :

La droite menée suivant l'axe du couple résultant donne le moment maximum.

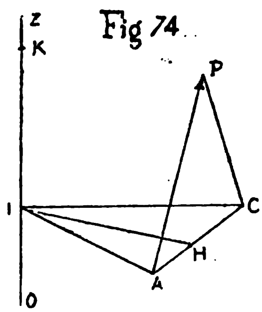
Toutes les droites qui font le même angle avec l'axe de ce couple donnent des moments égaux.

Toutes les droites situées dans le plan perpendiculaire à cet axe donnent des moments nuls.

Nous nous occuperons plus loin de la comparaison des moments maxima relatifs à différents points; nous allons faire connaître auparavant quelques théorèmes détachés.

109. Théorème. — *Si l'on considère une force* AP *et un axe indéfini* OZ, *sur lequel on porte un segment* MN, *le moment de la force* AP *relativement à l'axe* OZ *sera égal à six fois le volume du tétraèdre construit sur* MN *et* AP *comme arêtes opposées divisé par* MN.

Fig 74.



Par le point A, je mène un plan perpendiculaire à OZ, rencontrant cette droite en I. Soit AC la projection de la force AP sur ce plan, je suppose d'abord que le segment porté sur OZ commence en I, et ait pour longueur IK. Le tétraèdre construit sur IK et AP est équivalent à celui construit sur IK et AC, et ce dernier a pour mesure :

$$\tfrac{1}{3}\,\text{IK} \times \text{surf. AIC} = \tfrac{1}{6}\,\text{IK} \times \text{AC} \times \text{IH} = \tfrac{1}{6}\,\text{IK} \times \text{mom. force AP relativ. à OZ}.$$

Donc :

$$\text{mom. force AP relat. à OZ} = \frac{6 \text{ vol. tétraèd. (IK, AP)}}{\text{IK}}.$$

Or, quand on fait glisser une arête d'un tétraèdre suivant sa propre direction, on né change pas le volume de ce tétraèdre; on peut donc faire commencer le segment en un point quelconque de OZ.

On conclut de cette proposition le théorème suivant :

110. Théorème. — *Si l'on prend les moments des forces d'un système par rapport à un même axe, sur lequel on porte une certaine longueur l, la somme des moments des forces multipliée par le facteur* $\frac{l}{6}$ *est égale à la somme algébrique des volumes des tétraèdres construits sur la longueur l pour arête commune, et chaque force pour arête opposée.*

On voit l'analogie de cette proposition avec ce théorème :

La somme des moments d'un nombre quelconque de forces situées dans un même plan, relativement à un point quelconque du plan, est égale au double de la somme algébrique des triangles, ayant ce point pour sommet commun et chacune des forces pour base.

Si les forces se font équilibre sur le corps, la somme des tétraèdres considérés dans le théorème précédent sera égale à zéro, quelque soit l'axe OZ.

111. Définition. — *Deux systèmes de forces sont dits équivalents, lorsque, par la composition et la décomposition des forces, on peut ramener l'un des systèmes à l'autre, ou, en d'autres termes, quand toutes les forces étant transportées parallèlement à elles-mêmes, en un même point, les forces des deux systèmes ont la même résultante et donnent lieu par ce déplacement au même couple résultant.*

On en conclut que, relativement à trois axes passant par le point considéré, les sommes algébriques des projections des forces et les sommes algébriques de leurs moments, sont les mêmes pour les deux systèmes; on a donc les relations :

$$\left.\begin{aligned}\sum X &= \sum X',\\ \sum Y &= \sum Y',\\ \sum Z &= \sum Z',\end{aligned}\quad\right\}\quad \begin{aligned}\sum (yZ - zY) &= \sum (y'Z' - z'Y'),\\ \sum (zX - xZ) &= \sum (z'X' - x'Z'),\\ \sum (xY - yX) &= \sum (x'Y' - y'X').\end{aligned}$$

Cela posé, on a le théorème suivant :

112. Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de forces équivalents, la somme des tétraèdres construits sur les forces du premier système, prises deux à deux comme arêtes opposées, est égale à la somme des tétraèdres construits sur les forces du second système, prises aussi deux à deux comme arêtes opposées.*

Soient $a, b, c\ldots$ les forces du premier système; $a', b', c'\ldots$ celles du second.

Désignons d'une manière générale par (F, F') le volume du tétraèdre construit sur deux forces F et F' comme arêtes opposées, volume pris avec un signe convenable comme on l'a indiqué. On verra aisément que :

$$(F, F') = (F', F).$$

Cela posé, appliquons la remarque (111) en prenant successivement pour axe les forces $a, b, c\ldots, a', b', c'\ldots$ Les deux groupes de forces étant équivalents, les sommes des moments, et, par suite, les sommes des tétraèdres devront être égalées pour chacun des axes; on aura ainsi :

$$\begin{aligned}(a, b) + (a, c) + \ldots &= (a, a') + (a, b') + \ldots,\\ (b, a) + (b, c) + \ldots &= (b, a') + (b, b') + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a', a) + (a', b) + \ldots &= (a', b') + (a', c') + \ldots,\\ (b', a) + (b', b) + \ldots &= (b', a') + (b', c') + \ldots.\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ajoutant, réduisant et divisant par 2, on trouve :

$$(a, b) + (a, c) + (b, c)... = (a', b') + (a' c') + (b', c')...$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

113. Remarque. — Nous avons dit qu'un système de forces peut d'une infinité de manières être ramené à deux forces; il résulte du théorème précédent que :

De quelque manière qu'on remplace par deux seules forces un système de forces en nombre quelconque, le tétraèdre construit sur ces deux forces a un volume constant. Ce dernier volume sera nul si les deux forces sont dans un même plan et dans ce cas seulement. Ainsi :

La condition géométrique pour qu'un système de forces ait une résultante unique qui peut être nulle, est que la somme algébrique des volumes des tétraèdres construits sur ces forces, prises deux à deux comme arêtes opposées, soit égale à zéro.

§ IV. — *Axe central.*

114. — Nous avons dit que, si l'on change l'origine, le couple résultant change, tant pour son moment que pour la direction de son axe. Nous allons chercher les lois de cette variation.

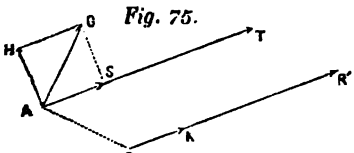


Fig. 75.

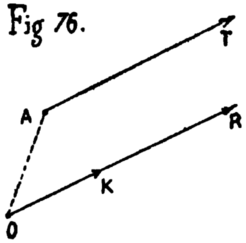
Tout étant réduit à la seule force $R = AT$ et au couple G, relativement au point donné A, nous voyons d'abord que si le point A se transporte en un point quelconque de AT, on aura toujours la force R et le couple G.

Décomposons ce couple G en deux autres, l'un $G \cos \varphi = AS$ dont l'axe AS sera dirigé suivant AT, et l'autre $G \sin \varphi = AH$ dont l'axe AH soit perpendiculaire sur AT. Si dans le plan mené par AT perpendiculairement au plan GAT, on transporte la force R parallèlement à elle-même, de A en O, il en résultera un couple, dont l'axe sera dirigé suivant AH ou son prolongement; nous pourrons transporter la force R de tel côté et à une distance x de A, telle que le couple Rx qui naîtra de ce transport, détruise le couple $G \sin \varphi = AH$. Il nous restera donc la force R transportée en OR′ et le couple dont l'axe est $AS = OK$; de là ce théorème:

Tant de forces que l'on voudra, sont toujours réductibles à une seule force, et à un seul couple, dont le plan est perpendiculaire à la direction de la force.

115. Arrêtons-nous à ce mode de réduction à une force OR et à un couple OK dirigé suivant OR. Si nous transportons la force R parallèlement à elle-même en AT, A étant un point quelconque, il naîtra de ce transport un couple dont l'axe sera perpendiculaire au plan AOR, donc perpendiculaire sur OK; ce couple se composera avec OK et donnera un couple résultant plus grand que OK. (Son moment sera la diagonale du rectangle construit OK et le moment du couple provenant du transport.) Donc :

Fig 76.



THÉORÈME. — *Le couple qui jouit de cette propriété d'avoir son axe parallèle à la direction de la résultante de translation, est un minimum par rapport aux couples résultants qui se rapportent à une origine quelconque.*

Cela démontre qu'il n'y a qu'une seule manière de réduire les forces à un système tel que celui que nous venons de définir.

Soit K le moment du couple minimum, on a :

$$K = G \cos \varphi.$$

Comme la valeur de K est indépendante de l'origine A dont nous étions partis, on a ce théorème :

116. Théorème. — *La projection, sur la direction de la résultante de translation, de l'axe du couple résultant relatif à une origine quelconque est constante.* Il existe donc toujours un axe O K dont la direction est celle de la résultante de translation, jouissant de la propriété que la somme des moments par rapport à cet axe est à la fois un maximum, relativement aux axes qui se croisent en l'un quelconque de ses points, et un minimum relativement à ceux qui donnent les moments maxima relatifs aux autres points de l'espace. Cet axe s'appelle l'*axe central* des moments du système de forces.

Les axes étant rectangulaires, si, l'origine étant le point A d'où l'on est parti, on pose :

$$X=\sum X'; \quad Y=\sum Y'; \quad Z=\sum Z';$$
$$L=\sum (y'Z'-z'Y'),$$
$$M=\sum (z'X'-x'Z'),$$
$$N=\sum x'Y'-y'X').$$

X, Y, Z sont les projections de la force R qui correspond au point A, sur les axes, et L, M, N sont les projections sur les mêmes axes de l'axe du couple G qui correspond au point A. On aura :

$$\cos\varphi=\frac{X}{R}\frac{L}{G}+\frac{Y}{R}\frac{M}{G}+\frac{Z}{R}\frac{N}{G},$$
$$K=G\cos\varphi=\frac{LX+MY+NZ}{R}.$$

Pour tout point de l'espace, il y a lieu de considérer la direction du moment maximum et la valeur de ce moment maximum. Pour tous les points de l'axe central, la direction du moment maximum est la même, celle de l'axe central, et le moment maximum a la même valeur; ce moment maximum est plus petit que celui qui se rapporte à tout autre point de l'espace.

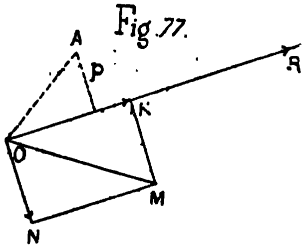
Quand on passe d'une origine à une autre, X, Y, Z, R restent constants, mais L, M, N varient. On voit, d'après ce qui précède, que la quantité :

$$LX + MY + NZ$$

reste invariable puisque K et R restent invariables.

117. Disposition de tous les axes autour de l'axe central. — Partons de l'axe central OK, OR; soit A un point quelconque, p sa distance à l'axe central, ON une perpendiculaire au plan AOR et égale à Rp; construisons sur OK et ON le rectangle OKMN, OM sera en grandeur et en direction l'axe du couple résultant pour le point A, et l'on aura pour la valeur de ce couple résultant :

Fig. 77.



$$G = \sqrt{K^2 + R^2p^2}; \quad \text{tg}\, MOK = \frac{Rp}{K}.$$

Par où l'on voit qu'*à des distances égales de l'axe central, les couples résultants ont des valeurs égales, et que leurs axes sont également inclinés sur cet axe* OR, ce qui justifie la dénomination d'axe central.

Pour tous les points d'une même surface cylindrique de révolution autour de OK, le moment G est le même; l'axe du couple résultant fait un angle constant avec OK; le long d'une même génératrice, cet axe conserve la même direction. Il suffit donc de connaître la distribution des axes pour les divers points d'une section droite de ce cylindre; ces axes forment un hyperboloïde de révolution autour de OK. Quand on passe d'un cylindre à un autre, la valeur de G augmente avec p, et l'angle du couple résultant avec OK a pour limite un droit.

118. Cas où il y a une résultante unique. — Si l'on prend pour origine un point quelconque de cette résultante, le couple correspondant sera nul, et, par suite, cette droite sera l'axe central; tous les points d'un plan quelconque passant par la résultante unique donnent des couples résultants dont les axes sont parallèles. On a encore des moments égaux pour tous les points d'un cylindre de révolution ayant pour axe la résultante unique.

Cas où la résultante est nulle. — Le couple résultant reste le même en grandeur et en direction, quelle que soit l'origine où l'on transporte les forces.

119. Détermination analytique du couple minimum et de l'axe central. — Supposons qu'on ait, relativement au point O, pris pour origine :

$$\begin{aligned} L &= \sum (y'Z' - z'Y'), \\ M &= \sum (z'X' - x'Z'), \\ N &= \sum (x'Y' - y'X'). \end{aligned}$$

Pour un point O_1 dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1, L, M, N deviendront L_1, M_1, N_1, et on aura les valeurs de ces quantités en remplaçant x', y', z' par les coordonnées relatives à des axes parallèles aux premiers et passant en O_1, c'est à dire par $x' - x_1$, $y' - y_1$, $z' - z_1$; donc :

$$L_1 = L - y_1 \sum Z' + z_1 \sum Y',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou bien :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} L_1 &= L - y_1 Z + z_1 Y, \\ M_1 &= M - z_1 X + x_1 Z, \\ N_1 &= N - x_1 Y + y_1 X, \end{aligned} \right.$$

$$G_1^2 = L_1^2 + M_1^2 + N_1^2.$$

G_1 sera le moment du couple correspondant au point O_1.

Remarquons en passant qu'on a bien :

$$L_1X + M_1Y + N_1Z = LX + MY + NZ.$$

Il faut déterminer le point O_1, et par suite x_1, y_1, z_1, de manière que G_1^2 soit un minimum ; on devra donc avoir :

$$\frac{dG_1^2}{dx_1} = \frac{dG_1^2}{dy_1} = \frac{dG_1^2}{dz_1} = 0,$$

ce qui donne :

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} M_1Z - N_1Y = 0, \\ N_1X - L_1Z = 0, \\ L_1Y - M_1X = 0; \end{array} \right.$$

ou bien :

$$\text{(2)} \qquad \frac{L_1}{X} = \frac{M_1}{Y} = \frac{N_1}{Z},$$

c'est à dire que l'axe du couple minimum est parallèle à la résultante de translation. Remettons pour L_1, M_1, N_1 leurs valeurs (1), et nous aurons :

$$\text{(3)} \qquad \frac{L - y_1Z + z_1Y}{X} = \frac{M - z_1X + x_1Z}{Y} = \frac{N - x_1Y - y_1X}{Z}.$$

Ces équations étant du premier degré en x_1, y_1, z_1, on trouve pour le point O_1, non pas un point unique, mais tous les points d'une droite. Cette droite est l'axe central.

De (2) on déduit :

$$\text{(4)} \quad \frac{L_1}{X} = \frac{M_1}{Y} = \frac{N_1}{Z} = \frac{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}{L_1X + M_1Y + N_1Z} = \frac{L_1X + M_1Y + N_1Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Or :

$$\begin{gathered} L_1^2 + M_1^2 + N_1^2 = G_1^2, \\ L_1X + M_1Y + N_1Z = LX + MY + NZ, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2. \end{gathered}$$

De (4) on déduit donc :

$$\frac{G_1^2}{LX + MY + NZ} = \frac{LX + MY + NZ}{R^2};$$

d'où :

$$G_1 R = LX + MY + NZ,$$

ce qui donne la valeur du couple minimum.

§ V. — *Quelques propriétés des systèmes de deux forces auxquelles on peut toujours ramener un système de forces données.*

120. Partons de l'axe central; nous avons l'axe OK du couple résultant dirigé suivant la résultante de translation OR. Soient P et P′ deux quelconques des forces composant un système équivalent à la force OR et au couple OK; si l'on transporte ces forces parallèlement à elles-mêmes au point O, leur résultante devra être égale à OR en grandeur et en direction. On a donc ce théorème :

I. — *Si sur les deux forces* P *et* P′ *d'un système quelconque transportées parallèlement à elles-mêmes, en un même point de l'espace, on construit un parallélogramme, la diagonale de ce parallélogramme sera constante, en grandeur et en direction.*

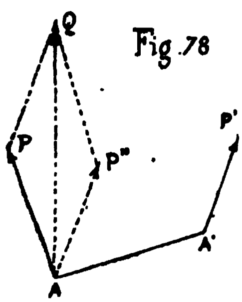


Fig. 78

Soit AA′ la plus courte distance des deux forces; transportons A′P′ parallèlement à elle-même en AP″; le plan PAP″ sera perpendiculaire sur AA′; la diagonale AQ du parallélogramme construit sur AP et AP″ sera parallèle à la résultante de translation; mais AQ est perpendiculaire sur AA′. Donc :

La plus courte distance des deux forces P *et* P′ *et* *la résultante de translation font entre elles un angle droit.*

121. Il est facile de montrer que la droite AA' rencontre l'axe central; car l'axe central OK étant perpendiculaire sur AA', on peut transporter le couple OK parallèlement à lui-même, de manière que son plan passe par AA', et le tourner dans son plan de manière que les deux forces du couple rencontrent AA'. Si l'on prend pour axe des moments la droite AA', en écrivant que :

Mom. P + mom. P' = mom. R + somme des moments des deux forces du couple, on aura :

$$\text{mom. } R = 0;$$

et comme R est perpendiculaire sur l'axe des moments, il faudra que R rencontre cet axe. Ainsi :

II. — *La plus courte distance des deux forces* P *et* P' *rencontre l'axe central et lui est perpendiculaire.*

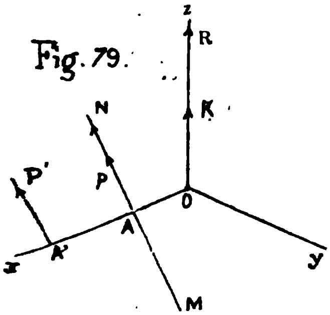
Je vais prouver maintenant que :

III. — *On peut déterminer le système de manière que l'une des deux forces agisse suivant une droite donnée quelconque, pourvu cependant qu'elle ne soit pas parallèle à l'axe central.*

Soit en effet MN la droite donnée, OA sa plus courte distance à l'axe central que je prends pour axe des x. Nous prendrons pour axe des z la droite OK et pour axe des y une perpendiculaire au plan zOx; je dis qu'on peut déterminer une force P agissant suivant MN et une force P' perpendiculaire à OA de manière à remplacer le système de la force R et du couple K. Les forces P et P' sont parallèles au plan des yz; soient : α et α' les angles que font les directions de ces forces avec l'axe central, $OA = x$, $OA' = x'$; les composantes de

P et P′ suivant les axes sont :

Fig. 79.



	Ox	Oy	Oz
P	0	$P \sin \alpha$	$P \cos \alpha$
P′	0	$P' \sin \alpha'$	$P' \cos \alpha'$

Les coordonnées des points A et A′ sont respectivement $x, 0, 0$; $x', 0, 0$; en écrivant que les sommes des projections des forces sur les axes Ox, Oy, Oz, et les sommes de leurs moments par rapport à ces axes, sont les mêmes dans les deux systèmes, on aura :

$$(1)\qquad P \cos \alpha + P' \cos \alpha' = R,$$
$$(2)\qquad P \sin \alpha + P' \sin \alpha' = 0,$$
$$(3)\qquad Px \cos \alpha + P'x' \cos \alpha' = 0,$$
$$(4)\qquad Px \sin \alpha + P'x' \sin \alpha' = K.$$

En tout quatre équations; x et α sont données; P, P′, x' et α' sont inconnues; de (1) et (2) on tire :

$$(5)\qquad P = \frac{R \sin \alpha'}{\sin (\alpha' - \alpha)}, \quad P' = \frac{-R \sin \alpha}{\sin (\alpha' - \alpha)}. \qquad (6)$$

En reportant dans (3) et (4), on a :

$$(7)\qquad x \operatorname{tg} \alpha' = x' \operatorname{tg} \alpha = -\frac{K}{R}.$$

On aura donc :

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{-K}{Rx}, \quad x' = \frac{-K}{R \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ces valeurs seront admissibles, excepté si $\alpha = 0$; (5) et (6) détermineront ensuite P et P′.

Les équations (1), (2), (3), (4) comprennent la solution de toutes les questions que l'on peut se poser relativement au système général des deux forces P et P′. Donnons-en un exemple, en démontrant le théorème déjà énoncé :

122. IV. — *Le tétraèdre construit sur* P *et* P′ *comme arêtes opposées a un volume constant.*

On a en effet :

$$6\,V = AA' \times P \times P' \sin(P, P') = (x' - x)\,PP' \sin(\alpha' - \alpha),$$

$$6\,V = -(x' - x)\,R^2 \frac{\sin\alpha \sin\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Or, de (7) on déduit :

$$x' - x = \frac{-K}{R}\frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin\alpha \sin\alpha'};$$

donc :

$$6\,V = KR = \text{constante}.$$

CHAPITRE VI

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME QUI N'EST PAS LIBRE.

§ I.

123. Équilibre d'un corps gêné. — Si les six conditions générales de l'équilibre sont satisfaites, l'équilibre aura encore lieu si on vient à gêner le corps ; aucune nouvelle condition d'équilibre ne peut donc être introduite ; mais, au contraire, une ou plusieurs des six équations de l'équilibre deviendront superflues, et il s'agira de déterminer pour les différents cas qui peuvent se présenter, celles de ces équations qui resteront nécessaires.

124. Nous commencerons par considérer le cas où le système se réduit à un seul point. Lorsque le point est entièrement libre, pour qu'il soit en équilibre il faut qu'on ait les équations :

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0.$$

Il peut arriver que le point dont on cherche les conditions d'équilibre ne soit pas libre de se mouvoir d'une manière quelconque dans l'espace, c'est à dire que ses coordonnées ne peuvent pas prendre toutes les valeurs possibles ; les déplacements de ce point étant soumis à certaines conditions, si la résultante des forces qui agissent sur lui tend à lui faire prendre un mouvement incompatible avec ces conditions, le corps restera en repos, exactement comme si cette résultante était nulle. C'est ce qui arrivera par exemple, dans le cas d'un point suspendu à un point fixe par l'intermédiaire d'un fil; si ce point matériel est soumis à une force dirigée suivant le prolongement du fil, le point restera en équilibre. La force produira seulement une tension du fil, et si la résistance du fil est supposée indéfinie, nous n'aurons pas à nous en occuper.

125. Équilibre d'un point assujéti à rester sur une surface fixe. — Nous supposons que le point ait la liberté de se mouvoir sur cette surface de toutes les manières possibles. Si ce point est sollicité par une force normale à la surface, il restera en équilibre. Au contraire, si la direction de la force n'est pas normale à la surface, il n'y aura pas équilibre; car on peut la décomposer en deux autres, l'une normale à la surface qui sera détruite par la résistance de la surface, l'autre tangente à la surface et qui produit le mouvement, si le point est entièrement libre de se mouvoir suivant toutes les directions; c'est ce qui n'aurait pas lieu dans le cas d'un frottement; mais nous ne considérons pas ce cas. Ainsi donc, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point assujéti à se mouvoir sur une surface, et sollicité par des forces quelconques, soit en équilibre, est que la résultante de ces forces soit normale à la surface.

Exprimons ces conditions analytiquement. Soit :

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface en coordonnées rectangulaires. Désignons par P, P'... les forces qui agissent sur le point matériel; par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$... les angles que ces forces font avec les axes, et posons :

$$X = \sum P \cos \alpha; \quad Y = \sum P \cos \beta; \quad Z = \sum P \cos \gamma.$$

Les conditions d'équilibre seront exprimées par les deux équations :

$$(2) \qquad \frac{X}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z}{\frac{df}{dz}}.$$

Si ces équations ne sont pas satisfaites, il n'y aura pas équilibre.

Si les valeurs de X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z, en résolvant les équations (1) et (2) par rapport à x, y, z, on trouvera le point où il faut placer le point matériel sur la surface, pour qu'il y ait équilibre.

126. Équilibre d'un point assujéti à rester sur une courbe donnée. — On verra, comme précédemment, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre ait lieu, est que la résultante de toutes les forces qui agissent sur le point soit normale à la courbe.

Soient :

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

les équations de la courbe; on devra avoir :

$$\frac{X}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\frac{dz}{ds} = 0,$$

ou simplement :

$$(2) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0;$$

or, de (1) on tire :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0,\\ &\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0,\end{aligned}\right.$$

d'où :

$$\frac{dx}{\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{dy}{\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dz}} = \frac{dz}{\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx}}.$$

Reportant dans (2) il vient :

$$(3)\qquad X\left(\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy}\right)+Y\left(\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dx}-\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\right)+Z\left(\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx}\right)=0.$$

Telle est la condition d'équilibre; si cette équation n'est pas satisfaite pour le point donné, il n'y aura pas équilibre. Si X, Y, Z sont donnés en fonction de x, y, z, les équations (1) et (3) feront connaître les points de la courbe pour lesquels l'équilibre a lieu.

127. Autre manière d'avoir égard à la résistante des surfaces et des lignes. — On voit, d'après ce qui précède, qu'une surface ne peut détruire que les forces qui lui sont normales; elle produit toujours le même effet qu'une force normale égale à la somme de celles qu'elle détruit. Il en est de même de la résistance d'une courbe; elle détruit les forces dont la direction est comprise dans le plan normal mené par le point d'application, et n'en détruit aucune autre; sa résistance pourra donc toujours être remplacée par une force normale égale et contraire à la résultante de celles qu'elle détruit. De là une nouvelle manière de traiter le problème.

1° Cas d'une surface. — Soient λ, μ, ν les angles que fait avec les axes la résistance normale N de la surface; il devra y avoir équilibre entre cette résistance et les forces données appliquées au point matériel; on aura donc les trois équations d'équilibre puisque, grâce à l'introduction de la force N, le point matériel peut être considéré comme libre :

$$X+N\cos\lambda=0;\qquad Y+N\cos\mu=0;\qquad Z+N\cos\nu=0.$$

Or, en faisant :

$$(6)\qquad V=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

on a :

$$(7) \qquad \cos\lambda = V\frac{df}{dx}; \quad \cos\mu = V\frac{df}{dy}; \quad \cos\nu = V\frac{df}{dz}.$$

On aura donc les trois équations :

$$(8) \quad X + NV\frac{df}{dx} = 0; \quad Y + NV\frac{df}{dy} = 0; \quad Z + NV\frac{df}{dz} = 0,$$

ou bien :

$$(9) \qquad -NV = \frac{X}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z}{\frac{df}{dz}}.$$

On voit qu'on arrive ainsi aux équations (2); mais on aura en outre la valeur de NV, ce qui donne le signe de V, car N est essentiellement positif, et la grandeur de N, qui est la valeur de la pression exercée par le point sur la surface, ou de la résistance de la surface. On voit qu'au point de vue de l'équilibre les équations (9) se réduisent à deux conditions; la troisième sera vérifiée en prenant pour N une valeur convenable. On calculera d'ailleurs plus rapidement la valeur de N par la formule :

$$(10) \qquad N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Si le point matériel est seulement posé sur la surface, il faudra en outre que le sens de la pression soit tel, qu'elle appuie le point sur la surface, condition qu'on devra vérifier dans chaque cas particulier, en déterminant, comme nous l'avons dit plus haut, le sens de cette pression par le signe de V.

2° **Cas de la courbe.** — On aura :

$$(11) \quad X + N\cos\lambda = 0; \quad Y + N\cos\mu = 0; \quad Z + N\cos\nu = 0,$$

$$(12) \qquad \cos\lambda\left(\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy}\right) + \ldots = 0;$$

d'où l'on déduira immédiatement la condition (5); N sera calculé par (10) et les équations (11) donneront $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ en grandeur et en signe.

§ II. — *Équilibre d'un corps gêné.*

128. 1° Le corps présente un point fixe. — Soit O ce point fixe; en y transportant toutes les forces, on obtiendra une résultante R et un couple G, — G : la résultante sera détruite par la fixité du point. Quant au couple G, — G il doit être nul; car en transportant le couple parallèlement à lui-même, de manière que la force G vienne passer par le point fixe, cette force sera détruite et la force — G produira tout son effet. Donc le moment du couple G est nul, et il en résulte les trois équations :

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Ainsi, pour l'équilibre d'un corps mobile en tous sens autour d'un point fixe, il faut et il suffit que les sommes algébriques des moments des forces par rapport à trois axes rectangulaires menés par ce point soient égales à zéro.

Le couple étant nul, indépendamment du point fixe, n'exerce aucun effort sur lui; le point fixe n'est donc pressé que par la résultante des forces X, Y, Z; ainsi la pression qu'éprouve le point fixe est égale à la résultante de toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point.

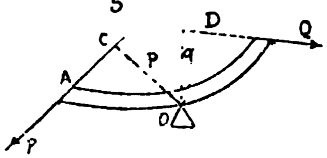
On voit que l'effet du point fixe se borne à détruire la pression qu'il supporte; on pourrait donc remplacer le point fixe par une force égale et contraire à cette pression; cette nouvelle force R_1 est la réaction du point fixe. Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes de R_1; les coordonnées de son point d'application sont nulles. On peut maintenant considérer le corps solide comme libre, et appliquer les six équations de l'équilibre, ce qui donne :

$$X + X_1 = 0, \quad Y + Y_1 = 0, \quad Z + Z_1 = 0;$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Les trois premières équations déterminent les composantes de la réaction du point fixe, laquelle est égale et contraire à la pression. Les trois dernières sont les équations de l'équilibre déjà trouvées antérieurement.

129. Un corps qui peut tourner librement autour d'un point fixe, constitue la machine que l'on nomme *levier*.

Fig. 80



Le point fixe se nomme le *point d'appui*.

On voit donc que l'équilibre du levier exige que les couples qui naissent du transport de toutes les forces parallèlement à elles-mêmes au point d'appui, se détruisent d'eux-mêmes.

Habituellement, le levier consiste en une barre solide presque droite, mobile autour d'un point fixe O, et il n'y a que deux forces : la résistance Q qui doit être vaincue par la puissance P; nous négligerons le poids du levier. Les couples provenant du transport des forces P et Q au point O doivent se détruire, ce qui exige d'abord qu'ils soient dans le même plan; donc :

La puissance et la résistance doivent être dans un même plan avec le point d'appui.

Il faut ensuite que les moments des couples soient égaux; donc :

$$P \times OC = Q \times OD.$$

Donc : *La puissance et la résistance doivent être réciproquement proportionnelles à leurs distances au point d'appui, et elles doivent tendre à faire tourner le levier en sens contraires.*

La résultante des forces P et Q, transportées parallèlement à elles-mêmes au point d'appui, forme la charge de ce point.

130. **2° Cas d'un axe fixe.** — Tous les points de l'axe sont invariables de position et susceptibles d'offrir en tous sens une résistance indéfinie. Prenons cette droite pour axe des z; la résultante OR des forces transportées parallèlement à elles-mêmes sera détruite, puisque le point O est fixe; quant aux couples résultant de cette translation, et situés dans les plans zOx et zOy, ils seront détruits par la résistance de l'axe, car les bras de levier de ces couples peuvent être transportés sur l'axe même. Il ne reste donc plus que le couple situé dans xOy, qui doit être nul, sans quoi, en le transportant parallèlement à lui-même de manière que l'une de ses forces passe au point O, celle-ci serait détruite, et l'autre ferait tourner le système autour de l'axe Oz. La seule condition d'équilibre est donc :

$$N = 0,$$

et l'on peut l'énoncer en disant que : *la somme algébrique des moments des forces par rapport à l'axe fixe doit être nulle.*

Pour connaître les efforts exercés sur l'axe fixe, il faut composer les forces qu'il détruit. Les couples situés dans le plan zOx et la force X se réduisent à une seule force qui rencontre l'axe, à moins que l'on ait $X = 0$, auquel cas on aurait un couple seulement; il en est de même dans le plan de yz. Outre ces efforts appliqués à l'axe, il y a encore la force Z qui tend à l'entraîner dans le sens où elle est dirigée. L'axe produit donc des forces égales et contraires à celles-ci, puisqu'il les tient en équilibre.

Si deux points seulement du système sont fixes, les résistances ne pourront provenir que des deux points, et l'on devra décomposer les forces qui rencontrent l'axe, en d'autres qui passent par ces deux points, et feront connaître les forces qu'ils produisent pour détruire celles-ci. Quant à la force dirigée suivant la droite qui les joint, elle pourra être décomposée d'une infinité de manières en deux autres appliquées à ces points.

On peut du reste traiter autrement la question en introduisant les réactions R_1 et R_2 des deux points fixes O et O′, dont les composantes seront :

X_1, Y_1, Z_1 pour le point O dont les coordonnées sont 0, 0, 0,
X_2, Y_2, Z_2 pour le point O′ dont les coordonnées sont 0, 0, h.

Grâce à l'introduction de ces forces, on pourra considérer le système comme entièrement libre, et appliquer les six équations de l'équilibre, ce qui donnera :

$$\begin{aligned} X + X_1 + X_2 &= 0, \\ Y + Y_1 + Y_2 &= 0, \\ Z + Z_1 + Z_2 &= 0, \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} L - hY_2 &= 0, \\ M + hX_2 &= 0, \\ N &= 0. \end{aligned} \right.$$

La dernière équation est la seule condition d'équilibre déjà trouvée; quant aux cinq autres, elles donnent :

$$X_2 = -\frac{M}{h}; \qquad Y_2 = +\frac{L}{h},$$
$$X_1 = -X + \frac{M}{h}; \quad Y_1 = -Y - \frac{L}{h},$$
$$Z_1 + Z_2 = -Z.$$

Ces équations déterminent donc X_1, Y_1, X_2, Y_2, mais seulement la somme $Z_1 + Z_2$, ce qui s'explique, comme nous l'avons dit, puisque les deux forces ont une résultante que l'on peut appliquer au point O, et que l'on peut partager en deux parties quelconques, appliquées aux points O et O′.

Le treuil n'est autre chose qu'un corps solide qui a la liberté de tourner autour d'un axe fixe. Ce qui précède fait donc connaître la condition d'équilibre que supporte cette machine, et la charge que supporte l'axe.

Lorsque les forces se réduisent à deux, situées dans des plans perpendiculaires à l'axe, la condition d'équilibre consiste en ce que ces forces soient en raison inverse de leur distance à l'axe.

131. Remarque. — On a établi, pour condition de l'équilibre dans le cas d'un point fixe, les trois équations :

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

On en conclut que, pour que des forces quelconques se fassent équilibre sur un corps mobile en tous sens autour d'un point fixe, il faut et il suffit qu'elles se fassent équilibre autour de trois axes rectangulaires passant par le point fixe; s'il en est ainsi, l'équilibre aura lieu autour d'une droite quelconque passant par le même point.

132. 3°. — *Le corps a la liberté de glisser le long de l'axe fixe, et en même temps de tourner autour de lui.*

On aura les deux équations d'équilibre :

$$Z = 0 \quad \text{et} \quad N = 0,$$

133. 4°. — *Le corps ne peut que glisser le long de l'axe sans tourner.*

On aura une seule condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre,

$$Z = 0,$$

et le couple situé dans le plan xy fera connaître la résistance opposée par l'axe à la torsion.

134. Équilibre d'un corps qui s'appuie sur un plan fixe sur lequel il peut glisser librement. — Prenons le plan fixe pour plan des xy; en chaque point de contact, il se développera une réaction normale à la surface, c'est à dire parallèle à l'axe des z; soient N_1, N_2... ces réactions, x_1, y_1, x_2, y_2... les coordonnées des points d'appui. En introduisant ces réactions, on pourra considérer le corps comme libre, et appliquer les six équations de l'équilibre, ce qui nous donnera :

$$(1)\quad \begin{cases} X = 0, & L + \sum y_i Z_i = 0. \\ Y = 0, & M - \sum x_i Z_i = 0. \\ Z + \sum Z_i = 0, & N = 0. \end{cases}$$

On déduit de ces équations :

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Donc, les forces données doivent avoir une résultante unique; la valeur de cette résultante sera égale à $\sum Z_i$; elle sera normale au plan, dirigée en sens contraire des réactions, et on aura évidemment son point d'application en cherchant celui des réactions dont on connaît les divers points d'application. En composant successivement ces réactions, on voit que le point d'application de leur résultante sera à l'intérieur d'un polygone convexe ayant pour sommets des points pris parmi les points de contact, et contenant à son intérieur ou sur ses côtés tous ceux de ces points de contact qui ne sont pas à ses sommets; ce polygone est ce qu'on nomme le polygone d'appui. Ainsi, pour que l'équilibre ait lieu, il faut que les forces aient une résultante normale au plan, et rencontrant ce plan à l'intérieur du polygone d'appui. Cette condition est suffisante; car, si elle est remplie, la résultante pourra toujours être décomposée en forces normales au plan, et appliquées aux divers points de contact.

Quel que soit le nombre des points de contact, nous aurons les trois conditions :

$$(2)\qquad X = 0; \quad Y = 0; \quad N = 0;$$

nous n'aurons pour déterminer les réactions Z_i que les trois équations :

$$(3)\quad Z + \sum Z_i = 0; \quad L + \sum y_i Z_i = 0; \quad M - \sum Z_i x_i = 0.$$

Il convient de distinguer plusieurs cas :

1° Il n'y a qu'un point d'appui.

On prendra ce point pour origine; on aura les deux nouvelles conditions d'équilibre :

$$L = 0; \quad M = 0$$

à joindre aux conditions (2); la pression sera déterminée par l'équation :

$$Z + Z_1 = 0.$$

2° Il y a deux points d'appui. On prendra l'un d'eux pour origine, et la droite qui les joint pour axe des x; on aura :

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \qquad x_2 = a, \quad y_2 = 0.$$

On aura donc la nouvelle condition :

$$L = 0$$

à joindre aux conditions (2); puis il viendra :

$$Z + Z_1 + Z_2 = 0; \quad M - Z_2 a = 0.$$

On a donc :

$$Z_2 = \frac{M}{a}; \quad Z_1 = -Z - \frac{M}{a}.$$

3° S'il y a trois points d'appui, il n'y a plus de nouvelle condition d'équilibre, et les trois réactions sont déterminées par les trois équations (3).

4° S'il y a un plus grand nombre de points d'appui, les charges de chacun de ces points sont indéterminées, puisqu'elles doivent seulement satisfaire aux trois équations (3); il en est de même encore dans le cas où il y a seulement trois points d'appui, mais situés en ligne droite.

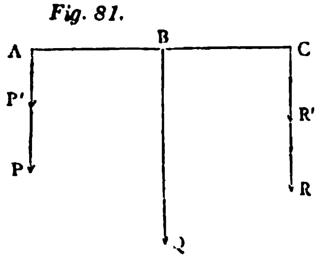
On pourra donc se donner à volonté toutes les réactions, sauf trois.

Il faudra toutefois que les réactions choisies arbitrairement aient le même signe, et que les trois réactions conclues des équations (3) aient le même signe que les précédentes.

135. Explication d'un paradoxe. — Nous venons de trouver que les pressions sont indéterminées lorsqu'il y a plus de trois points d'appui; cependant, en considérant *à priori* un corps appuyé contre un plan, par un nombre quelconque de points, et tenu en équilibre par une force normale à ce plan, il paraît évident que chaque point d'appui éprouve une pression déterminée. De là un paradoxe que nous allons chercher à éclaircir.

Remarquons qu'il s'agit d'un corps que nous avons supposé parfaitement invariable; nous pouvons donc concevoir les points de contact de ce corps comme unis entre eux par un plan parfaitement inflexible, lequel repose sur les points fixes A, B, C, D... Or, lorsqu'il y a plus de trois points d'appui, ou seulement trois, quand ils tombent en ligne droite, il n'est pas difficile de voir que certaines parties des pressions qu'on supposerait exercées par le plan sur ces points, peuvent être imaginées comme se reportant indifféremment des uns aux autres, de manière qu'on ne puisse demander ou ce qu'elles sont en elles-mêmes, ni sur quels points d'appui elles s'exercent de préférence, à moins de détruire l'hypothèse de l'inflexibilité parfaite du plan qui unit les points du corps.

Fig. 81.



Ainsi, supposons trois points d'appui en ligne droite; nous admettons que les trois points A, B, C du corps sont liés entre eux par une verge inflexible, qui repose sur les trois points d'appui fixes A, B, C; admettons que l'on sache que cette verge est actuellement poussée aux trois points A, B, C par les trois forces normales P, Q, R parallèles entre elles; on ne serait pas en droit d'en conclure que les pressions exercées sur les points d'appui sont respectivement égales aux forces P, Q, R. Prenons en effet, dans P et R des parties P′ et R′ telles que :

$$\frac{P'}{R'} = \frac{BC}{AB}.$$

A cause de la raideur de la verge, ces forces P′ et R′ vont pouvoir être remplacées par leur résultante P′ + R′ appliquée en B; on aura donc indifféremment les deux systèmes de pressions :

en A :	en B :	en C :
P	Q	R
$P - P'$,	$Q + P' + R'$,	$R - R'$.

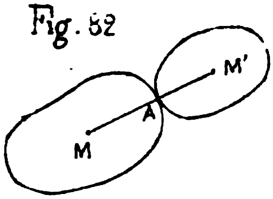
Ainsi l'indétermination doit exister, d'après les principes mêmes que nous avons admis. Cependant, les pressions sont déterminées. C'est que l'hypothèse d'une rigidité parfaite dans les parties constituantes du corps solide est une abstraction purement mathématique, mais qui ne s'accorde pas exactement avec les effets naturels. Dans la réalité, la figure d'un corps s'altère toujours un peu, lorsqu'il est soumis à l'action de diverses forces : il y a des déformations ; les distances des molécules varient, et de là naissent des forces intérieures; une partie quelconque du corps doit être en équilibre sous l'action de ces forces, et des actions exercées par les parties voisines. Dans le cas précédent, on peut bien, au point de vue statique, transporter les forces P′ et R′ au point B; mais en opérant ainsi, on change les conditions d'équilibre des parties intérieures. En somme, les équations fournies par la statique doivent toujours être vérifiées; mais la théorie de l'élasticité en fournit d'autres qui, jointes aux précédentes, donnent tout ce qu'il faut pour déterminer les pressions aux divers points d'appui. Les systèmes de pression, en nombre infini, vérifiant les équations de la statique, ne sont pas équivalents au point de vue de l'équilibre d'élasticité qui est assuré par un seul de ces systèmes. Le problème à résoudre peut être très difficile, mais il est déterminé.

136. *De l'équilibre de deux corps solides, qui se touchent en un point donné et s'appuient l'un contre l'autre, chacun de ces corps étant sollicité par des forces données.*

Soient :

X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la réaction AM du corps M' sur M ;

Fig. 52



$-X_1$, $-Y_1$, $-Z_1$ les composantes de la réaction AM' de M sur M'.

On peut considérer chacun des corps comme libre, et l'on a pour le corps M :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{c} \sum X + X_1 = 0; \quad \sum Y + Y_1 = 0; \quad \sum Z + Z_1 = 0. \\ L + y_1 Z_1 - z_1 Y_1 = 0; \quad M + z_1 X_1 - x_1 Z_1 = 0; \\ N + x_1 Y_1 - y_1 X_1 = 0. \end{array}\right.$$

Pour le corps M' :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{c} \sum X' - X_1 = 0; \quad \sum Y' - Y_1 = 0; \quad \sum Z' - Z_1 = 0. \\ L' - y_1 Z_1 + z_1 Y_1 = 0; \quad M' - z_1 X_1 + x_1 Z_1 = 0; \\ N' - x_1 Y_1 + y_1 X_1 = 0. \end{array}\right.$$

On a ainsi 12 équations pour l'équilibre des deux corps.

En introduisant :

$$N = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2},$$

et les angles a, b, c, de cette réaction avec les axes, on pourra éliminer N, et l'on aura onze équations.

On opérera de même dans le cas d'un nombre quelconque de corps solides dont plusieurs s'appuient les uns contre les autres.

Tableau résumé des conditions d'équilibre d'un corps solide dans les différents cas.

	NOMBRE des conditions	
Point matériel libre.	3	$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0.$
Point sur une surface.	2	$\frac{X}{f'_x} = \frac{Y}{f'_y} = \frac{Z}{f'_z}.$
Point sur une courbe.	1	$X(f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y) + Y(f'_z\varphi'_x - f'_x\varphi'_z) + Z(f'_x\varphi'_y - f'_y\varphi'_x) = 0.$
Corps solide libre.	6	$X=0,\ Y=0,\ Z=0,\ L=0,\ M=0,\ N=0.$
Corps pouvant tourner autour d'un point fixe.	3	$L=0,\ M=0,\ N=0.$
Corps pouvant tourner autour d'un axe fixe, et glisser le long de l'axe.	2	$Z=0,\quad N=0.$
Corps pouvant tourner sans glisser.	1	$N=0.$
Corps pouvant glisser sans tourner.	1	$Z=0,$
Corps solide reposant sur un plan inébranlable : 1° par un point fixe.	5	$X=0,\ Y=0,\quad L=0,\ M=0,\ N=0.$
2° par deux points sur Ox.	4	$X=0,\ Y=0,\quad L=0,\quad N=0.$
3° Par trois points non en ligne droite ou un plus grand nombre.	3	$X=0,\ Y=0,\quad N=0.$

En résumé, on peut avoir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 conditions pour l'équilibre.

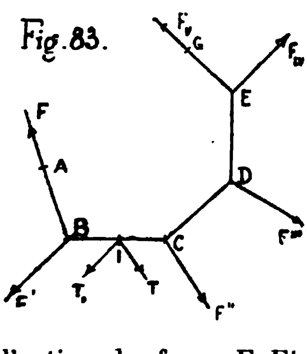
CHAPITRE VII

POLYGONE FUNICULAIRE. — COURBE FUNICULAIRE. THÉORIE DE LA CHAINETTE. — COURBE DES PONTS SUSPENDUS.

§ I. — *Polygone funiculaire.*

137. Équilibre du polygone funiculaire. — Supposons qu'un fil parfaitement flexible et inextensible soit sollicité par des forces $F, F', F'', F''', F^{IV}, F^{V}$ appliquées à ses extrémités A, G, et à divers points B, C, D, E de sa longueur; ce fil étant en équilibre sous l'action des forces dont il s'agit, affectera la forme d'un polygone ayant pour sommets les divers points d'application de ces forces; on donne à un pareil fil le nom de polygone funiculaire. Nous allons voir en quoi consiste les conditions de son équilibre.

Fig. 83.



Supposons qu'on vienne à couper le cordon BC en I; la partie ABI va cesser d'être en équilibre; pour maintenir l'équilibre, il faudra lui appliquer en I une certaine force IT; il faudra de même appliquer en I une force IT_1 pour maintenir en équilibre la partie ICD... G; je dis que la force IT doit être dirigée suivant le prolongement de BI. En effet, le cordon ABI est en équilibre sous l'action des forces F, F′ et IT. L'équilibre aura encore lieu si nous solidifions le cordon, en lui laissant toutefois la liberté de tourner autour du point B, qui sera fixe; mais on voit alors que la force IT produirait le mouvement si elle n'était pas dirigée suivant BI; enfin, à cause de la flexibilité du cordon, il faut que cette force T soit dirigée suivant le prolongement de BI.

Rapprochons maintenant ABI et ICDEG. Chacune des deux parties du polygone étant en équilibre séparément, le polygone entier sera aussi en équilibre, sous l'action des forces F, F′, F″, F‴, F^{IV}, F^{V}, T et T_1. Mais il était déjà en équilibre sous l'action des seules forces F, F′, F″, F‴, F^{IV}, F^{V}; donc les forces T et T_1 se détruisent; ainsi $T_1 = T$.

La valeur de l'une quelconque des forces T et T_1 est la tension du cordon BC.

Ainsi, dans l'état d'équilibre, chaque cordon est tiré par deux forces égales et contraires, dirigées suivant le cordon; chacune de ces forces représente la tension du cordon. On pourrait mesurer cette force en coupant réellement le cordon et interposant un dynamomètre entre les deux parties.

On voit, comme conséquence immédiate de ce qui vient d'être dit, que les forces extrêmes F et F^{V} doivent être dirigées suivant les prolongements des cordons BA et EG et qu'elles sont égales aux tensions de ces cordons.

Le point A sera ainsi en équilibre, sous l'action de la force F et de la tension du cordon AB. Passons aux conditions d'équilibre du point B : ce point devra être maintenu en équilibre sous l'action de la force F égale à la tension Bt du cordon AB, de la force BF′ et de la tension Bt_1 du cordon BC. En solidifiant le système, on voit que la force Bt_1 doit être égale et opposée à la résultante des deux forces Bt et BF′; ainsi le côté BC du polygone funiculaire doit être dans le plan des deux droites BA, BF′;

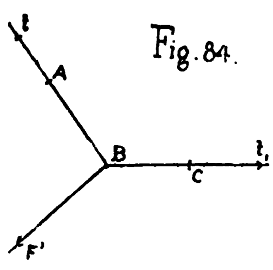


Fig. 84.

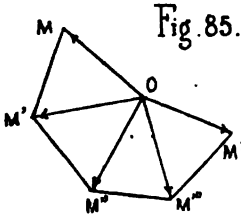
il doit être le prolongement de la diagonale du parallélogramme construit sur Bt et BF$'$, et la tension du cordon BC sera représentée par la grandeur de cette diagonale.

On voit que nous avons déterminé la direction du côté AB et celle de BC, sans faire aucune hypothèse sur la direction et l'intensité des deux forces F et F$'$; on arrivera ainsi à la dernière force F^{v}, qui devra être dans le plan DEF^{iv}, suivant le prolongement de la diagonale du parallélogramme construit sur F^{iv} et la tension de ED, et égale à la diagonale de ce parallélogramme.

138. Polygone de Varignon. — Toutes ces conditions d'équilibre du polygone funiculaire peuvent s'exprimer simplement par une construction géométrique due à Varignon.

Par un point quelconque O, menons une droite OM égale et parallèle à la force BF qui est égale à la tension T du côté AB; par le point M une droite MM$'$ égale et parallèle à F$'$; par M$'$ une droite égale et parallèle à F$''$... Les droites OM, OM$'$, OM$''$... représentent les directions des divers côtés du polygone, les grandeurs de ces droites représentent les tensions des divers côtés. OM^{iv} représentera la tension du côté EG, de sorte qu'en menant par M^{iv} une droite égale et parallèle à F^{v}, on retombera sur le point O.

Fig. 85.



On voit qu'en opérant ainsi, on a construit le polygone des forces; ce polygone se ferme de lui-même; il faut donc que les forces données soient en équilibre si on les applique au point O, c'est à dire que l'on ait les trois premières équations de l'équilibre d'un corps solide :

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0.$$

On voit, en résumé, que les conditions d'équilibre du polygone funiculaire sont :

1° *Que l'extrémité du polygone de Varignon coïncide avec son point de départ.*

2° *Que les cordons intermédiaires* BC, CD... *soient parallèles aux diagonales* OM′, OM″... *du polygone.*

3° *Enfin, que chaque côté puisse résister à la tension qu'il supporte; toutes ces tensions sont représentées en grandeur par les diagonales du polygone.*

139. Dans le cas particulier où les diverses forces F, F′, F″... qui agissent sur le polygone funiculaire sont toutes parallèles à un même plan, il est aisé de voir que le polygone de Varignon est situé tout entier dans un plan parallèle au précédent; il en est de même du polygone funiculaire dont les côtés sont parallèles aux diagonales du polygone auxiliaire.

Il en est encore de même, lorsque toutes les forces intermédiaires F′, F″, F‴, F^{IV} sont parallèles à une même droite, quelles que soient les directions des forces extrêmes F et F^{V}; car, alors, le polygone de Varignon devient un triangle, et le polygone funiculaire est situé tout entier dans un plan parallèle au plan de ce triangle, donc parallèle à la direction commune des forces; la dernière force est dans ce plan.

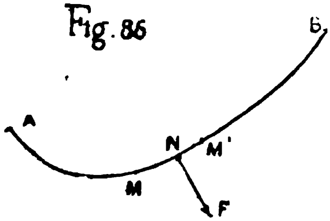
§ II. — *Courbes funiculaires.*

140. Le polygone funiculaire est la figure d'équilibre d'un fil soumis à des forces discontinues; lorsque la répartition des forces est continue, le polygone se change en une *courbe funiculaire* dont nous allons chercher les équations..

En partant du polygone pour arriver à la courbe, on pourrait admettre que chaque élément de la courbe funiculaire est tiré dans le sens de sa longueur par deux forces égales et contraires; chacune d'elles est la tension du fil au point considéré. Cette tension serait une fonction continue de l'arc s de la courbe compté d'un point fixe jusqu'au point considéré. Mais on peut le démontrer aussi directement.

Soit AMB le fil flexible et inextensible, dont les extrémités A et B sont fixes ou sollicitées par des forces données de direction et d'intensité; soit $AM = s$. L'élément $MM' = ds$ sera sollicité par une petite force NF que l'on pourra concevoir appliquée en un point quelconque N de MM'; cette force sera de même ordre de grandeur que ds, et nous pourrons la représenter par $F ds$, F étant fini; cette force sera la résultante des petites forces qui agissent sur les divers points de MM'. Par exemple, si le fil est homogène et pesant, que p désigne le poids de l'unité de longueur, la force NF sera pds; si le fil, tout en étant pesant, a une section variable ω, et un poids spécifique variable ρ, on aura :

Fig. 86



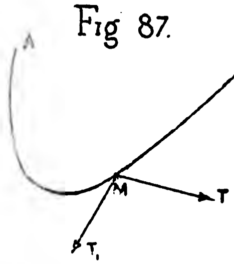
$$NF = \omega\, ds \times \rho = \omega\rho\, ds = f(s)\, ds;$$

car ρ et ω seront des fonctions connues de s, et le produit $\omega\rho$ pourra être représenté par $f(s)$.

Nous rapporterons les divers points du fil à trois axes coordonnés rectangulaires quelconques Ox, Oy, Oz, et nous désignerons les composantes de la force NF par Xds, Yds, Zds. X, Y, Z seront les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de longueur du fil.

141. De la tension en un point du fil. — Si l'on coupe le fil en M, la partie AM ne sera plus en équilibre; il faudra lui appliquer une force MT qui pourra remplacer l'action de MB; il faudra de même appliquer à MB une force MT_1. On prouvera, comme dans le cas du polygone, que ces deux forces doivent être égales et opposées.

Fig 87.

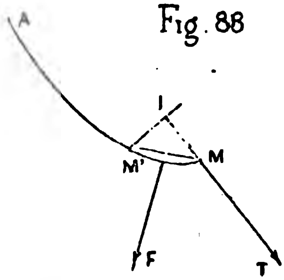


Chacune d'elles est finie, car MT remplace toutes les petites forces du premier ordre de petitesse en nombre infini appliquées aux divers points de MB.

Je dis en second lieu que la direction commune de T et T_1 est celle de la tangente en M à la courbe funiculaire.

Supposons la portion AM'M en équilibre (*fig.* 88). Soit M' un point voisin de M; fixons M' et solidifions l'élément M'M en lui laissant la liberté de tourner autour de M'; nous avons un petit levier MM' sollicité par deux forces : T et $F ds$; le point d'appui est M'; les moments relatifs au point M' doivent être égaux; celui de $F ds$ est infiniment petit du second ordre; celui de T est :

Fig. 88



$$T \times M'I = T \times MM' \sin \theta = T ds \sin \theta,$$

en posant :

$$M'MI = \theta.$$

T étant fini, pour que cette expression soit du second ordre, il faut que θ soit du premier ordre; par conséquent :

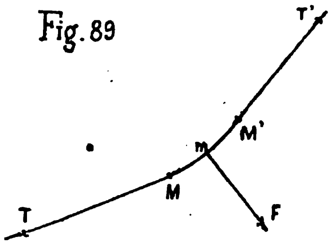
$$\text{Limit. } \theta = 0;$$

donc MT a la direction de la limite de MM', c'est à dire de la tangente en M'.

La valeur commune de T et T_1 est la tension en M.

142. Équations de l'équilibre du fil. — L'élément MM' doit être en équilibre sous l'action des trois forces T, T', et

Fig. 89



$$mF = Pds.$$

Écrivons que les sommes des projections de ces trois forces sur trois axes rectangulaires sont nulles, et nous aurons :

$$-\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \left(T\frac{dx}{ds} + d.T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds = 0,$$

c'est à dire :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + Xds &= 0,\\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Yds &= 0,\\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Zds &= 0.\end{aligned}\right.$$

En général, X, Y, Z dépendent seulement de x, y, z, et c'est ce que nous supposerons dans ce qui suit; mais il peut se faire aussi que ces quantités soient des fonctions de l'arc s. Tel serait le cas d'un fil pesant, pour lequel la densité varierait d'un point à l'autre.

Si l'on prend x pour variable indépendante, on aura à déterminer y et z en fonction de x pour avoir l'équation de la courbe.

Les équations (1) contiennent:

$$x,\ T,\ \frac{dT}{dx},\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2};$$

c'est un système de trois équations simultanées du second ordre. Il semblerait *à priori* que les intégrales générales doivent contenir six constantes arbitraires; ici il n'y en aura que cinq parce que les équations ne renferment pas $\frac{d^2T}{dx^2}$. Si l'on peut déterminer à l'aide des équations (1) $\frac{dT}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}$, et si l'on pose :

$$\frac{dT}{dx} = f\left(x, y, z, T, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right),$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(x, y, z, T, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right),$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = \psi\left(x, y, z, T, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right),$$

en partant d'une valeur donnée de x et adoptant pour les valeurs correspondantes de y, z, T, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ des valeurs données, qui du reste peuvent être quelconques, on pourra calculer pour une valeur quelconque de x : T, y et z. Il y aura donc seulement cinq constantes arbitraires ; on les déterminera en supposant que les deux extrémités du fil sont données et que le fil a une longueur connue, l. On écrira donc, en désignant par x_0 et x_1 les valeurs de x qui répondent à ces extrémités, que pour $x = x_0$:

$$y = y_0, \quad z = z_0,$$

et pour $x = x_1$:

$$y = y_1, \quad z = z_1,$$

et enfin que :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx}\, dx = l.$$

143. Nous allons montrer comment on peut éliminer T des équations (1). On peut écrire ces équations comme il suit :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &T d \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{dx}{ds} dT + X ds = 0, \\ &T d \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{dy}{ds} dT + Y ds = 0, \\ &T d \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{dz}{ds} dT + Z ds = 0. \end{aligned} \right.$$

On en tire, en multipliant les équations (2) par des facteurs convenables, et remarquant que :

$$\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dz^2}{ds^2}=1,$$

et par conséquent :

$$\frac{dx}{ds}\,d\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\,d\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}\,d\cdot\frac{dz}{ds}=0,$$

les équations (3)

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &dT=-(Xdx+Ydy+Zdz), && (a)\\ &T\left(\frac{dx}{ds}\,d\cdot\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}\,d\cdot\frac{dx}{ds}\right)=Xdy-Ydx, && (b)\\ &T\left(\frac{dz}{ds}\,d\cdot\frac{dx}{ds}-\frac{dx}{ds}\,d\cdot\frac{dz}{ds}\right)=Zdx-Xdz, && (c)\end{aligned}\right.$$

et le système (3) est équivalent au système (1).

De (b) et (c), on conclut :

$$(4)\quad T=\frac{Xdy-Ydx}{\dfrac{dx}{ds}\,d\cdot\dfrac{dy}{ds}-\dfrac{dy}{ds}\,d\cdot\dfrac{dx}{ds}}=\frac{Zdx-Xdz}{\dfrac{dz}{ds}\,d\cdot\dfrac{dx}{ds}-\dfrac{dx}{ds}\,d\cdot\dfrac{dz}{ds}}.$$

On aura donc, en somme, les deux équations suivantes pour déterminer la courbe funiculaire :

$$(5)\quad \frac{Xdy-Ydx}{Zdx-Xdz}=\frac{\dfrac{dx}{ds}\,d\cdot\dfrac{dy}{ds}-\dfrac{dy}{ds}\,d\cdot\dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{dz}{ds}\,d\cdot\dfrac{dx}{ds}-\dfrac{dx}{ds}\,d\cdot\dfrac{dz}{ds}}.$$

$$(6)\quad Xdx+Ydy+Zdz+d\left\{\frac{Xdy-Ydx}{\dfrac{dx}{ds}\,d\cdot\dfrac{dy}{ds}-\dfrac{dy}{ds}\,d\cdot\dfrac{dx}{ds}}\right\}=0.$$

Nous simplifierons quelque peu, en prenant x pour variable indépendante; nous aurons :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}; \quad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{ds}}{\frac{dx}{ds}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dx}{ds}\, d\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\, d\cdot\frac{dx}{ds}}{dx\,\frac{dx^2}{ds^2}},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz'}{dx} = \frac{\frac{dx}{ds}\, d\cdot\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\, d\cdot\frac{dx}{ds}}{dx\,\frac{dx^2}{ds^2}};$$

d'où :

$$\frac{dx}{ds}\, d\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\, d\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx}{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}},$$

$$\frac{dx}{ds}\, d\cdot\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\, d\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{dx}{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}.$$

Les équations (4), (5) et (6) deviendront donc :

$$(7) \qquad T = \left(X\frac{dy}{dx} - Y\right)\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$(8) \qquad \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{Y}{X}}{\frac{dz}{dx} - \frac{Z}{X}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{d^2z}{dx^2}},$$

$$(9) \quad X + Y\frac{dy}{dx} + Z\frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx}\left\{\left(X\frac{dy}{dx} - Y\right)\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right\} = 0.$$

(8) et (9) seront les équations propres à déterminer y et z en fonction de x, c'est à dire la figure du fil; la première de ces équations est du second ordre, la seconde du troisième ordre; il y aura bien cinq constantes arbitraires, comme on l'a vu précédemment.

L'équation (7) fera connaître ensuite la tension.

144. Dans le cas où la courbe funiculaire est plane, ce qui arrivera si les forces qui sollicitent chaque point du fil sont parallèles à un même plan, ou à une même droite en prenant ce plan pour plan des xy, on aura :

$$Z = 0, \quad z = 0,$$

et par suite le problème sera résolu par les équations :

$$(10) \qquad X + Y\frac{dy}{dx} + \frac{d.}{dx}\left\{\left(X\frac{dy}{dx} - Y\right)\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right\} = 0,$$

$$(11) \qquad T = \left(X\frac{dy}{dx} - Y\right)\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

L'équation (10) est une équation différentielle du troisième ordre. On déterminera les trois constantes arbitraires comme précédemment.

145. Dans le cas général, on est très loin de savoir intégrer. Considérons le cas où les composantes X, Y, Z sont les dérivées d'une même fonction φ de x, y, z, c'est à dire où l'on a :

$$X = \frac{d\varphi\,(x, y, z)}{dx}, \quad Y = \frac{d\varphi\,(x, y, z)}{dy}, \quad Z = \frac{d\varphi\,(x, y, z)}{dz},$$

ce qui exige que l'on ait :

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}; \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}; \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy},$$

la formule :

$$dT = -(Xdx + Ydy + Zdz)$$

donne :

$$dT = -\left(\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz\right) = -d\varphi,$$

$$T = -\varphi(x, y, z) + C,$$

en désignant par C une constante arbitraire.

Soit T_0 la tension au point x_0, y_0, z_0, on aura :

$$(12) \qquad T - T_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0) - \varphi(x, y, z).$$

On voit donc que dans ce cas, sans avoir déterminé la figure d'équilibre, on connaîtra l'accroissement de tension en passant d'un point à un autre ; en sorte qu'il suffira que cette tension soit connue en un point déterminé, pour qu'elle le soit aussi dans toute la longueur du fil. Dans ce cas l'équation (9) peut être intégrée et la figure du fil sera déterminée par les deux équations :

$$(13) \qquad \frac{X\frac{dy}{dx} - Y}{X\frac{dz}{dx} - Z} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{d^2z}{dx^2}},$$

$$(14) \qquad \varphi(x, y, z) - C + \left(X\frac{dy}{dx} - Y\right)\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 0.$$

Ces équations sont toutes les deux du second ordre ; il convient du reste de les écrire comme il suit :

$$(13^{bis})\qquad \frac{\dfrac{d\varphi}{dx}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{d\varphi}{dy}}{\dfrac{d\varphi}{dx}\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{d\varphi}{dz}}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\dfrac{d^2z}{dx^2}},$$

$$(14^{bis})\qquad \varphi(x, y, z)+\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{dy}{dx}-\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}+\dfrac{dz^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=\mathrm{C}.$$

Mais, dans la pratique, il vaudra toujours mieux substituer la valeur (12) de T dans deux des équations (1) ou dans deux de leurs combinaisons convenablement choisies.

146. Transformation des équations (1). — Partons du système équivalent (2) ; désignons par ξ, η, ζ les cosinus des angles que le rayon de courbure de la courbe funiculaire fait avec les axes, par α, β, γ les angles que fait la tangente avec les mêmes axes. On aura comme l'on sait :

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha;\qquad d\cdot\frac{dx}{ds}=d\cos\alpha=\frac{\cos\xi\, ds}{\rho};$$

donc les équations (2) vont s'écrire :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\cos\alpha\frac{d\mathrm{T}}{ds}+\cos\xi\frac{\mathrm{T}}{\rho}+\mathrm{X}=0,\\
&\cos\beta\frac{d\mathrm{T}}{ds}+\cos\eta\frac{\mathrm{T}}{\rho}+\mathrm{Y}=0,\\
&\cos\gamma\frac{d\mathrm{T}}{ds}+\cos\zeta\frac{\mathrm{T}}{\rho}+\mathrm{Z}=0.
\end{aligned}\right.$$

En remarquant que :

$$\left\{\begin{aligned}
\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma&=1,\\
\cos^2\xi+\cos^2\eta+\cos^2\zeta&=1,\\
\cos\alpha\cos\xi+\cos\beta\cos\eta+\cos\gamma\cos\zeta&=0,
\end{aligned}\right.$$

on en tire :

$$\frac{dT}{ds} + (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) = 0,$$

$$\frac{T}{\rho} + (X \cos \xi + Y \cos \eta + Z \cos \zeta) = 0;$$

ou bien, en désignant par P et Q les composantes de la force rapportée à l'unité de longueur suivant la tangente et la normale principale de la courbe :

$$(16) \qquad \frac{dT}{ds} + P = 0,$$

$$(17) \qquad \frac{T}{\rho} + Q = 0.$$

Ces équations sont souvent très utiles.

147. Remarquons que si λ, μ, ν désignent les angles que fait avec les axes de coordonnées l'axe du plan osculateur, on déduira des formules (15) :

$$X \cos \lambda + Y \cos \mu + Z \cos \nu = 0,$$

ce qui montre que la force est située dans le plan osculateur de la courbe funiculaire. Ce qui devait être, puisque, quand on a établi les équations de l'équilibre, on a vu que la force extérieure et les tensions T et T' devaient se faire équilibre. Ces trois forces sont donc dans un même plan qui est évidemment le plan osculateur.

148. Cas où toutes les forces sont normales au fil. — On a dans ce cas :

$$\frac{X}{F}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{F}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{F}\frac{dz}{ds} = 0;$$

d'où :

$$X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

et par suite :

$$dT = 0,$$
$$T = c.$$

Ainsi, la tension est constante tout le long du fil. Les équations (15) donnent alors :

$$X = -\frac{T}{\rho}\cos\xi,$$
$$Y = -\frac{T}{\rho}\cos\eta,$$
$$Z = -\frac{T}{\rho}\cos\zeta,$$

ou bien, en faisant :

$$X = P\cos A;\quad Y = P\cos B;\quad Z = P\cos C,$$
$$P\cos A = -\frac{T}{\rho}\cos\xi,$$
$$P\cos B = -\frac{T}{\rho}\cos\eta,$$
$$P\cos C = -\frac{T}{\rho}\cos\zeta;$$

d'où :

$$P^2 = \frac{T^2}{\rho^2} = \frac{C^2}{\rho^2},$$
$$P = \frac{C}{\rho},$$
$$\cos A = -\cos\xi,\quad \cos B = -\cos\eta,\quad \cos C = -\cos\zeta.$$

Donc : *La force* P *est inversement proportionnelle au rayon de courbure, et elle est dirigée suivant le prolongement de ce rayon de courbure.*

Ce cas est réalisé, quand un fil est tendu sur une surface S par deux forces qui le tirent à ses extrémités ; car la réaction de la surface étant normale à la surface, est normale au fil. La tension est constante, donc les forces qui tirent le fil aux deux bouts sont égales entre elles. On voit que le plan osculateur de la courbe est constamment normal à la surface; donc la courbe funiculaire est une ligne géodésique de la surface. Enfin la réaction de la surface en chaque point est en raison inverse du rayon de courbure.

149. Dans les applications, la courbe funiculaire sera le plus souvent plane. Alors, en prenant ce plan pour plan des xy, on aura pour déterminer la courbe, les équations :

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &d.\,T\frac{dx}{ds} + X\,ds = 0,\\ &d.\,T\frac{dy}{ds} + Y\,ds = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on a :

$$X\,dx + Y\,dy = d\varphi\,(x, y),$$

et par conséquent :

$$T = T_0 + \varphi\,(x_0, y_0) - \varphi\,(x, y),$$

en substituant cette valeur de T dans l'une des équations (18) on aura l'équation différentielle de la courbe cherchée.

§ III. — *Théorie de la chaînette. — Courbe des ponts suspendus.*

150. La *chaînette* est la courbe formée par un fil pesant et homogène, suspendu à deux points fixes. — Soit p le poids de l'unité de longueur; on aura, en prenant l'axe des y vertical, et dirigé vers le haut :

$$X = 0, \quad Z = 0, \quad Y = -p.$$

Les équations générales deviendront donc :

$$d\ T\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$d.\,T\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$d\,T\frac{dy}{ds} = p\,ds.$$

On en conclut d'abord, en désignant par C et C' deux constantes arbitraires :

$$T\frac{dx}{ds}=C,$$
$$T\frac{dz}{ds}=C',$$

d'où :

$$C'dx - Cdz = 0,$$
$$C'x - Cz = C'',$$

en désignant par C'' une nouvelle constante arbitraire.

Donc la courbe est tout entière dans un plan vertical, qui doit naturellement contenir les deux points fixes. Prenons donc ce plan pour plan des xy, et nous aurons :

$$(a)\quad \begin{cases} d\ T\dfrac{dx}{ds}=0, \\ d.\ T\dfrac{dy}{ds}=pds, \end{cases}$$

donc :

$$T\frac{dx}{ds}=ph,$$

en désignant par h une constante arbitraire ; d'où :

$$T=ph\frac{ds}{dx};$$

on voit que ph désigne la tension au point le plus bas, pour lequel on a $\frac{dx}{ds}=1$. En portant cette valeur de T dans la seconde des équations (a), il viendra :

$$d\left(ph\frac{ds}{dx}\frac{dy}{ds}\right)=pds,$$

ou bien :

$$(b)\quad ds=h\,d\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Soit : $\frac{dy}{dx} = y'$; nous aurons :

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2};$$

en portant ces valeurs dans l'équation (b), il viendra :

$$dx\sqrt{1 + y'^2} = h\,dy',$$
$$\frac{dx}{h} = \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

en intégrant et désignant par x_0 une constante arbitraire, on trouvera :

$$\frac{x - x_0}{h} = \log.\left(y' + \sqrt{1 + y'^2}\right),$$

d'où l'on tirera :

$$\left\{\begin{aligned} y' + \sqrt{1 + y'^2} &= e^{\frac{x - x_0}{h}}, \\ -y' + \sqrt{1 + y'^2} &= e^{\frac{-(x - x_0)}{h}}, \end{aligned}\right.$$
$$2y' = e^{\frac{x - x_0}{h}} - e^{\frac{-(x - x_0)}{h}}.$$

Multiplions par dx, intégrons et désignons par H la constante arbitraire ; nous aurons :

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x - x_0}{h}} + e^{\frac{-(x - x_0)}{h}}\right) + \mathrm{H}.$$

Le point le plus bas a pour coordonnées :

$$x = x_0 \quad y = \mathrm{H} + h.$$

Si l'on transporte l'axe des y de manière qu'il passe par le point le plus bas, on aura :

$$(1) \qquad y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{\frac{-x}{h}}\right).$$

Il faut se rappeler que ph est la tension au point le plus bas.

Comme on a : $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$, il est facile de calculer $\frac{ds}{dx}$, et par suite s. On trouve ainsi :

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Il n'y a pas de constante à introduire si l'on compte les arcs à partir du point le plus bas de la courbe.

Comme la tension est donnée par la formule :

$$T = ph\frac{ds}{dx},$$

on a :

$$(2) \qquad T = py.$$

Ainsi : *La tension en un point quelconque est proportionnelle à l'ordonnée de ce point.*

151. Détermination des constantes et construction de la courbe. — Dans le plan xOy, menons l'horizontale BC, la verticale AC, et posons :

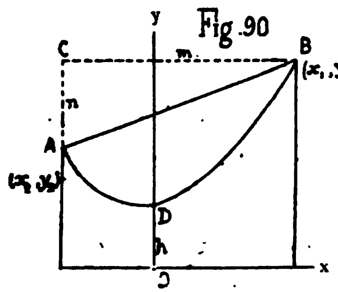


Fig. 90

$$BC = m, \qquad AC = n,$$
$$\text{arc } ADB = l;$$

m, n, l sont les données, et il s'agit de trouver les coordonnées (x_1, y_1) (x_2, y_2) des points auxquels la chaînette est attachée et la constante $h = OD$.

Nous avons :

$$y_1 = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x_1}{h}} + e^{-\frac{x_1}{h}}\right),$$

$$y_2 = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x_2}{h}} + e^{-\frac{x_2}{h}}\right),$$

$$(3) \qquad l = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x_2}{h}} - e^{-\frac{x_2}{h}} - e^{\frac{x_1}{h}} + e^{-\frac{x_1}{h}}\right);$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 &= m, \\ y_1 - y_2 &= n, \end{aligned}\right.$$

$$(5)\qquad n = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x_1}{h}} + e^{\frac{-x_1}{h}} - e^{\frac{x_2}{h}} - e^{\frac{-x_2}{h}}\right).$$

On pourra déterminer h, x_1 et x_2 par les équations (3), (4) et (5). On en déduit en effet :

$$(6)\qquad l + n = h\left(e^{\frac{x_1}{h}} - e^{\frac{x_2}{h}}\right),$$

$$l - n = h\left(e^{\frac{-x_2}{h}} - e^{\frac{-x_1}{h}}\right),$$

$$l^2 - n^2 = h^2\left(e^{\frac{x_1 - x_2}{h}} + e^{\frac{-(x_1 - x_2)}{h}} - 2\right),$$

$$l^2 - n^2 = h^2\left(e^{\frac{m}{h}} + e^{\frac{-m}{h}} - 2\right),$$

$$(7)\qquad e^{\frac{m}{2h}} - e^{\frac{-m}{2h}} = \frac{\sqrt{l^2 - n^2}}{h}.$$

Cette équation ne renferme que l'inconnue h ; je dis qu'elle a toujours une racine positive et une seule. Soit en effet :

$$\frac{m}{2h} = u,$$

il viendra :

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2u} = \frac{\sqrt{l^2 - n^2}}{m},$$

ou bien :

$$1 + \frac{u^2}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4.5} + \dots = \frac{\sqrt{l^2 - n^2}}{m}.$$

Le premier membre de cette équation augmente toujours avec h ; pour $h = 0$, il est égal à 1 ; pour $h = +\infty$, il est égal à $+\infty$. Donc, ce premier membre passe une fois et une seule par une valeur donnée supérieure à 1 ; il suffit donc de montrer que l'on a :

$$\frac{\sqrt{l^2 - n^2}}{m} > 1 \quad \text{ou} \quad l^2 > m^2 + n^2,$$

ou

$$l > \sqrt{m^2 + n^2} > AB,$$

ce qui est évident.

L'équation (6) donnera :

$$l + n = h\left(e^{\frac{x_1 + m}{h}} - e^{\frac{x_1}{h}}\right) = he^{\frac{x_1}{h}}\left(e^{\frac{m}{h}} - 1\right),$$

d'où :

$$\frac{x_1}{h} = \log\left(\frac{l + n}{h}\right) - \log\left(e^{\frac{m}{h}} - 1\right).$$

On aura ensuite :

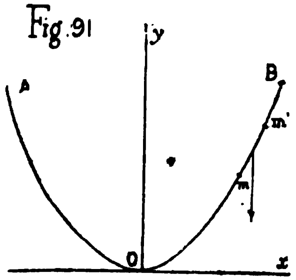
$$y_1 = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x_1}{h}} + e^{\frac{-x_1}{h}}\right) + n.$$

Donc, tout sera connu.

152. Remarque sur le centre de gravité de la chaînette. — On démontre dans le calcul des variations que, de toutes les courbes de longueur donnée tracées sur un plan entre deux points donnés, et qui tournent autour d'un axe situé dans ce plan, la chaînette est celle qui engendre l'aire minimum. En faisant intervenir le théorème de Guldin, on voit que parmi toutes ces courbes la chaînette est celle dont le centre de gravité est le plus bas.

153. Courbe des ponts suspendus. — Soit AOB un fil homogène suspendu aux deux points fixes A et B; chaque élément est sollicité par une force verticale proportionnelle à la projection de cet élément sur une horizontale; trouver la figure d'équilibre.

Fig. 91



La courbe est encore plane; si nous appelons T la tension au point m et p la force totale qui sollicite une portion de la chaîne dont la projection horizontale est égale à l'unité de longueur. On a par les formules générales :

$$(1)\qquad d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0,\qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=pdx.\qquad(2)$$

De la première de ces deux équations on déduit :

$$T\frac{dx}{ds}=ph,$$

si on appelle ph la tension de la courbe au point le plus bas.

Remplaçant dans (2) T par :

$$ph\frac{ds}{dx},$$

il vient :

$$d.ph\frac{dy}{dx}=pdx;$$

ou bien, en prenant x pour variable indépendante :

$$h\frac{d^2y}{dx^2}=1.$$

Intégrant, et désignant par C' et C'' deux constantes arbitraires, il vient :

$$y=\frac{1}{2h}x^2+C'x+C''.$$

Si l'origine est le point le plus bas, on doit avoir pour $x=0$:

$$y=0,\qquad \frac{dy}{dx}=0;$$

donc :

$$C''=0,\qquad C'=0,$$

et par suite :

$$y=\frac{x^2}{2h}.$$

La courbe est une parabole dont le sommet est en O et l'axe vertical. On trouve facilement :

$$T = p\sqrt{x^2 + h^2},$$

T est minimum en O.

154. Détermination des constantes. — Les données sont encore, en gardant les notations du § 151, m, n et l et les inconnues $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$ et h. On a :

$$(2)\quad y_1 = \frac{x_1^2}{2h}, \qquad y_2 = \frac{x_2^2}{2h}, \qquad y_1 - y_2 = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{2h} = n.$$

On déduit de là :

$$(3)\qquad x_1 + x_2 = \frac{2hn}{x_1 - x_2} = \frac{2hn}{m},$$

puisque :

$$(4)\qquad x_1 - x_2 = m.$$

D'ailleurs :

$$hs = \int \sqrt{x^2 + h^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\, x\sqrt{x^2 + h^2} + \tfrac{1}{2}\, h^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 + h^2}\right) + \text{Constante};$$

par conséquent on a :

$$(5)\quad 2hl = x_1\sqrt{x_1^2 + h^2} - x_2\sqrt{x_2^2 + h^2} + h^2 \log \frac{\sqrt{x_1^2 + h^2} + x_1}{\sqrt{x_2^2 + h^2} + x_2}.$$

On tire de (3) et (4) :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{n}{m}h + \frac{m}{2}, \\ x_2 &= \frac{n}{m}h - \frac{m}{2}, \end{aligned}\right.$$

en portant ces valeurs de x_1 et x_2 dans l'équation (5), on aura une équation qui ne contiendra plus que l'inconnue h; quand h sera ainsi déterminé, les équations (2) et (6) feront connaître x_1, x_2, y_1, y_2.

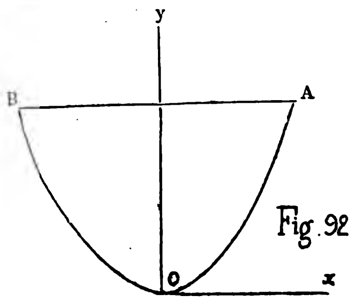


Fig. 92.

Supposons pour simplifier que les deux extrémités du fil soient sur une même horizontale; on aura :

$$x_2 = -x_1 = -\frac{m}{2},$$

et l'équation (5) donnera :

$$f(h) = -\frac{l}{h} + \frac{x_1}{h}\sqrt{1 + \frac{x_1^2}{h^2}} + \log\left(\frac{x_1}{h} + \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{h^2}}\right) = 0;$$

on en tire, après réduction :

$$f'h = \frac{1}{h^2}\left(l - 2x_1\sqrt{1 + \frac{x_1^2}{h^2}}\right).$$

$f'(h)$ s'annule pour $h = h_1$; en posant :

$$h_1 = \frac{2x_1^2}{\sqrt{l^2 - 4x_1^2}},$$

valeur réelle, car :

$$\overline{AB}^2 = 4x_1^2 < \overline{AOB}^2 \text{ ou } l^2,$$

pour :

$$\begin{array}{ll} h < h_1 \\ h = h_1 \\ h > h_1 \end{array}\left\{\begin{array}{lll} f'(h) < 0 & & f(h) \text{ décroit,} \\ f'(h) = 0 & & f(h) \text{ minimum,} \\ f'(h) > 0 & & f(h) \text{ croit sans cesse.} \end{array}\right.$$

Pour h positif et très petit, on peut réduire $f(h)$ à :

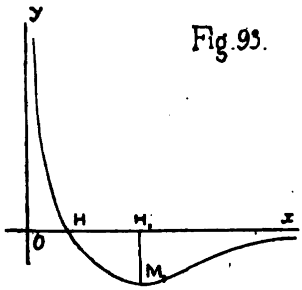


Fig. 93.

$$\frac{x_1^2}{h^2} + \log\left(\frac{2x_1}{h}\right) - \frac{l}{h}.$$

donc $f(h)$ est positif et très grand; ainsi :

$$f(0) = +\infty,$$
$$f(h_1) = \text{minimum},$$
$$f(+\infty) = 0.$$

D'où l'on conclut :

$$f(h_1) < 0;$$

donc il n'y a qu'une racine OH.

h étant connu, le problème est facilement résolu.

DEUXIÈME PARTIE

CINÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL. — VITESSE.

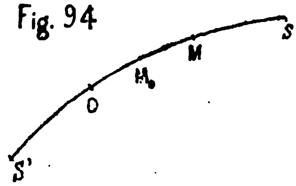
1. Objet de la cinématique. — La cinématique a pour objet l'étude du mouvement considéré en lui-même, indépendamment des causes qui le produisent. Elle se subdivise elle-même en deux branches : la cinématique pure, où le mouvement est étudié d'une manière abstraite, et la cinématique appliquée, qui étudie les mécanismes servant à la transmission et à la transformation des mouvements. Dans ce cours nous ne nous occuperons que de la cinématique pure.

Cette portion de la Mécanique emprunte à l'expérience trois notions : celle du *point matériel* déjà considérée en statique, celle de la *vitesse* et celle du *temps*.

Nous définirons plus loin la vitesse. Nous pouvons dès maintenant dire que la vitesse n'étant autre chose qu'une longueur portée dans un sens déterminé sur une droite, nous l'évaluerons en prenant pour unité de longueur le mètre; le temps sera évalué en secondes. Nous commencerons la cinématique par l'étude du mouvement d'un point matériel; plus tard nous étudierons le mouvement d'un corps solide.

2. Mouvement d'un point. — Le mouvement d'un point est parfaitement défini, si on se donne la ligne droite ou courbe parcourue par ce point; ce qu'on appelle la trajectoire du point, et à chaque instant la position du point sur sa trajectoire.

Fig. 94



Supposons que la courbe SS′ soit la trajectoire du mobile, et que l'on connaisse à chaque instant l'arc $OM = s$ parcouru par le mobile à porter d'une origine fixe O; autrement que l'on ait la relation :

$$s = f(t),$$

le mouvement du mobile sera déterminé si on compte le temps à partir d'un instant bien défini, par exemple à partir de l'instant où il se trouve en un point M_0 de sa trajectoire.

3. Mouvement rectiligne uniforme. — Vitesse. — Le plus simple de tous les mouvements est celui où l'espace parcouru par le mobile sur sa trajectoire est proportionnel au temps. Le mouvement est dit alors uniforme. Si nous appelons s et s_0 les espaces parcourus au temps t et à l'origine du temps, on a :

$$\frac{s - s_0}{t} = K,$$

$$s = s_0 + Kt.$$

Dans un pareil mouvement on donne le nom de ***vitesse*** à l'espace parcouru dans l'unité de temps. Dans la formule précédente K représente la ***vitesse***.

4. Vitesse dans un mouvement quelconque. — Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit varié. Dans un mouvement varié quelconque considérons le mobile à un instant quelconque t, soit M la position du mobile au temps t, M′ sa position à l'instant $t + \Delta t$. La droite MM′ qui joint le premier point au second est ce qu'on appelle le *déplacement* du mobile pendant le temps Δt. Le rapport $\frac{\mathrm{MM'}}{\Delta t}$ est ce qu'on peut appeler la *vitesse moyenne* pendant le temps Δt; c'est la vitesse que devrait avoir le mobile animé d'un mouvement rectiligne et uniforme pour éprouver le déplacement MM′ pendant le temps Δt. Cette vitesse moyenne est une grandeur géométrique MT_1 portée sur la droite MM′ dans le sens du mouvement. Imaginons que l'intervalle Δt tende vers zéro. La direction MT_1 tendra vers une limite MT qui est la tangente à la courbe en M et la grandeur géométrique MT_1 vers une limite MT portée sur la tangente qui représente la vitesse au temps t.

La vitesse au temps t est la limite de la quantité :

$$\frac{\text{corde MM}'}{\Delta t}.$$

Or, si nous désignons l'arc MM′ par Δs, on a identiquement :

$$\frac{\text{corde MM}'}{\Delta t} = \frac{\text{corde MM}'}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

comme :

$$\text{Limite}\ \frac{\text{corde MM}'}{\Delta s} = 1,$$

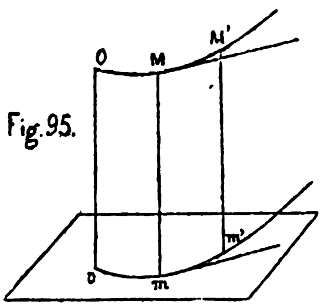
on a :

$$\text{Limite}\ \frac{\text{corde MM}'}{\Delta t} = \text{Limite}\ \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

On voit donc qu'à un instant quelconque la vitesse est la dérivée de l'espace par rapport au temps, et de plus que la vitesse est une grandeur géométrique qui à chaque instant doit être considérée comme portée sur la *tangente* à la courbe au point considéré à partir de ce point dans le *sens du mouvement* du mobile sur sa trajectoire.

5. Projection du mouvement sur un plan fixe. — Pendant qu'un point se meut dans l'espace en décrivant une courbe, sa projection sur un plan faite parallèlement à une direction donnée décrit une autre courbe. Soit mm' la projection de l'arc infiniment petit MM', la corde mm' sera la projection de la corde MM'. Si nous amplifions ces deux droites dans le rapport $\frac{1}{\Delta t}$, l'une des droites amplifiées sera encore la projection de l'autre. D'où on voit en passant à la limite qu'à chaque instant :

Fig. 95.



La vitesse de la projection est la projection de la vitesse du mobile dans l'espace.

Remarque. — Ce que nous disons de la projection sur un plan s'applique à la projection sur un axe faite parallèlement à un plan déterminé.

6. *Relation entre la vitesse d'un point mobile et les dérivées de ses coordonnées par rapport au temps.* Le mouvement d'un point mobile dans l'espace sera parfaitement défini si on connaît à chaque instant ses coordonnées x, y, z, c'est à dire si x, y, z sont des fonctions connues du temps.

$$x = f(t),$$
$$y = \varphi(t),$$
$$z = \psi(t).$$

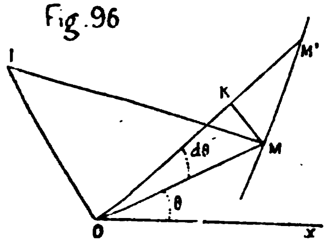
Or $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sont les vitesses de la projection du mobile sur les axes. On a donc, si les axes sont rectangulaires et si α, β, γ sont les angles de la vitesse du mobile dans l'espace avec la partie positive des axes,

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = V \cos \beta, \quad \frac{dz}{dt} = V \cos \gamma.$$

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

7. Cas des coordonnées polaires. — Il existe d'autres modes de décomposition de la vitesse. Supposons le mouvement plan et la trajectoire du mobile rapportée à des coordonnées polaires ρ et θ.

Fig. 96



L'arc élémentaire $MM' = ds$ de la trajectoire peut être considéré comme la résultante des deux longueurs :

$$MK = \rho d\theta,$$

et

$$KM' = d\rho,$$

la première perpendiculaire au rayon vecteur OM, la seconde comptée suivant ce rayon, dans les sens respectifs des accroissements de θ et de ρ. Par suite, la vitesse V a deux composantes :

$$\rho \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\rho}{dt},$$

dans ces mêmes directions et sens, et sa valeur est :

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \frac{d\theta^2}{dt^2}}.$$

La première composante :

$$\rho \frac{d\theta}{dt},$$

a reçu le nom de *vitesse de circulation;* la seconde $\frac{d\rho}{dt}$ de *vitesse d'entraînement ou de glissement;* enfin le rapport :

$$\text{aire } \frac{\text{MOM}'}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\theta}{dt}$$

se nomme *vitesse aréolaire.*

On sait que la sous-normale $\text{OI} = \frac{d\rho}{d\theta}$, par conséquent :

$$\text{OI} = \frac{\frac{d\rho}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}}.$$

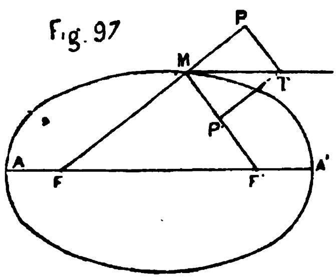
La sous-normale est donc égale au rapport de la vitesse de glissement à la vitesse angulaire. La vitesse *angulaire* est la vitesse de circulation d'un point situé à une distance de l'origine égale à l'unité.

8. Méthode de Roberval pour mener les tangentes aux courbes. — Pour arriver à déterminer les tangentes aux courbes, Roberval considère une courbe comme engendrée par le mouvement d'un point mobile; la vitesse en chaque point est la direction de la tangente à la courbe.

Si donc nous pouvons trouver, soit les vitesses simultanées des projections d'un point de la courbe sur deux axes coordonnés rectangulaires ou obliques, soit la vitesse de circulation et la vitesse de glissement dans un système polaire quelconque, nous aurons par une construction connue la vitesse propre du point mobile et la direction de cette vitesse qui est celle de la tangente. Il n'est pas même nécessaire de connaître ces vitesses simultanées elles-mêmes, mais seulement leur rapport, pour avoir la direction de la tangente.

EXEMPLES. — **1° Tangente à l'ellipse.** — Si nous considérons le point F comme pôle, la vitesse du point M sur la courbe se composera d'une vitesse de glissement le long du rayon vecteur que nous représenterons par MP, et d'une vitesse de circulation perpendiculaire au rayon vecteur. Si donc nous portons à partir du point P sur la perpendiculaire PT une longueur égale à la vitesse de circulation, le point T sera un point de la tangente. Mais si on prend pour pôle le point F′, on obtiendra encore un point de la tangente en portant sur le rayon vecteur une longueur MP′ égale à la vitesse de glissement et sur la perpendiculaire P′T une longueur égale à la vitesse de circulation. Or, en désignant par ρ et ρ' les rayons vecteurs, les vitesses de glissement sont pour le point M :

Fig. 97



$$\frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{d\rho'}{dt}.$$

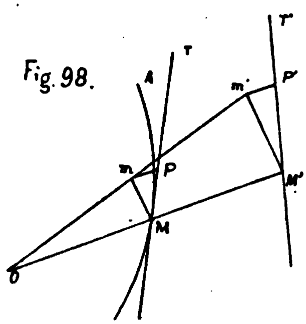
Mais à cause de la relation :

$$\rho + \rho' = 2a,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{d\rho'}{dt}.$$

Donc les longueurs MP et MP′ sont égales et doivent être portées en sens contraire. Si l'une est dirigée de F vers M, l'autre le sera de M vers F′; par suite les deux triangles PMT, P′MT sont égaux et la droite MT est bissectrice de l'angle PMF′.

2° Tangente à la conchoïde. — La définition de la conchoïde de Nicomède peut être généralisée de la manière suivante :



Soit une courbe quelconque AB, je mène un rayon vecteur quelconque d'un point fixe O et je prolonge ce rayon vecteur d'une quantité constante MM′; il s'agit de trouver la tangente à la courbe, lieu des points M′.

Si nous élevons au rayon vecteur OM une perpendiculaire Mm égale à la vitesse de circulation de ce point, la perpendiculaire mP élevée à Mm jusqu'à la rencontre de la tangente MT représentera la vitesse de glissement du point M.

Faisons la même construction pour M′. Les vitesses de circulation des deux points M et M′ étant entre elles comme les rayons vecteurs OM, OM′, le point m' que nous obtiendrons sera sur la droite Om prolongée; d'ailleurs, la distance MM′ étant constante, les vitesses de glissement des points M et M′ sont égales. Donc m'P′ $=$ mP. De là on conclura facilement la construction de la tangente en M′, si Mm est connu; or il est évident qu'il n'est pas nécessaire de connaître la vitesse de circulation Mm du point M et qu'on retrouvera absolument la même construction si la grandeur arbitraire Mm est avec cette vitesse dans un rapport quelconque.

CHAPITRE II

ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

9. Accélération dans le mouvement rectiligne. — Lorsque le mouvement d'un point matériel n'est pas uniforme, sa vitesse varie à chaque instant. Parmi les différentes espèces de mouvements variés nous considérerons en particulier le mouvement rectiligne uniformément varié. C'est celui où la vitesse varie de quantités égales dans des temps égaux. La quantité dont la vitesse varie dans l'unité de temps se nomme l'accélération. Si nous la désignons par γ et si nous appelons v_0 la vitesse initiale du mobile, dans un mouvement uniformément varié, nous aurons la relation :

$$v - v_0 = \gamma t,$$

ou :

$$v = v_0 + \gamma t,$$

$$\gamma = \frac{v - v_0}{t}.$$

L'accélération est constamment égale à la variation de la vitesse divisée par le temps.

Si le mouvement rectiligne est quelconque, désignons par v et $v + \Delta v$ les vitesses du mobile aux temps t et $t + \Delta t$. Si à partir du temps t le mouvement devenait uniformément varié, l'accélération de ce mouvement serait $\frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Si l'intervalle de temps Δt tend vers zéro, le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ tend vers une certaine limite qui est par définition l'*accélération* du mobile au temps t. On voit qu'à chaque instant l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

Supposons le mouvement sur la droite défini par la relation :

$$x = f(t),$$

qui fait connaître la position du mobile sur sa trajectoire à un instant quelconque. La vitesse v et l'accélération γ seront données par les formules :

$$v = \frac{dx}{dt}; \quad \gamma = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

10. Accélération dans un mouvement quelconque. — De la définition de l'accélération dans le mouvement rectiligne nous passerons facilement à la définition de l'accélération dans un mouvement quelconque.

Soient M et M′ les positions du mobile aux temps t et $t + \Delta t$; MT et M′T′ les vitesses du mobile à ces deux instants. Menons ME égale et parallèle à M′T′; TE sera la variation géométrique de la vitesse pendant le temps Δt. Lorsque le temps Δt tend vers zéro, la parallèle à TE menée par le point M tend vers une position limite MI, et la limite de la grandeur

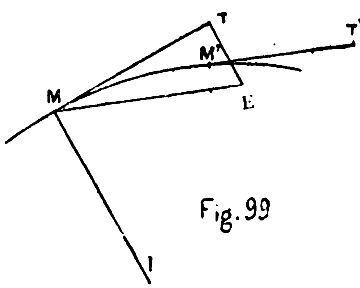


Fig. 99

$$\frac{\mathrm{TE}}{\Delta t}$$

portée sur MI est ce que nous appellerons l'accélération du mobile au temps t. La droite MI est située dans le plan osculateur de la courbe au point M, puisque le plan TME est à la limite le plan osculateur.

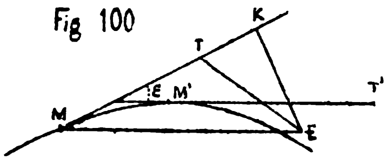
11. Composantes tangentielle et normale de l'accélération. — Nous avons vu que l'accélération est située dans le plan osculateur, on détermine ordinairement cette quantité géométrique par ses projections sur la tangente et sur la normale principale à la courbe.

Soit $MT = v$ la vitesse du mobile au temps t,

$$M'T' = v + dv = ME,$$

sa vitesse au temps infiniment voisin $t + dt$. L'accélération est égale en grandeur à $\frac{TE}{dt}$ et ses projections sur la tangente et la normale principale égales respectivement à :

Fig 100



$$\frac{TK}{dt}, \quad \frac{EK}{dt}.$$

Or, si nous appelons ε l'angle de contingence, nous avons :

$$TK = (v + dv)\cos\varepsilon - v = dv \cos\varepsilon,$$

$$\frac{TK}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\varepsilon,$$

ou simplement $\frac{dv}{dt}$ en négligeant les infiniment petits du second ordre.

On a de même :

$$\frac{EK}{dt} = \frac{(v + dv)\sin\varepsilon}{dt},$$

ou simplement :

$$\frac{EK}{dt} = \frac{(v + dv)\,\varepsilon}{dt} = \frac{(v + dv)\,\varepsilon}{MM'} \times \frac{MM'}{dt}.$$

Remarquant que :

$$\frac{\varepsilon}{MM'} = \frac{1}{\rho},$$

ρ désignant le rayon de courbure de la courbe, et :

$$\frac{MM'}{dt} = v,$$

on a, en négligeant les infiniment petits du second ordre :

$$\frac{\mathrm{EK}}{dt} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Les valeurs des *accélérations tangentielle et normale* sont donc :

$$\frac{dv}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{\rho}.$$

La projection de l'accélération sur la tangente est égale à *la dérivée de la vitesse considérée comme fonction du temps;* la projection sur la normale principale est égale *au carré de la vitesse divisé par le rayon de courbure.*

Si le mouvement du mobile est uniforme, la vitesse du mobile étant constante, sa dérivée est constamment nulle; l'accélération tangentielle d'un pareil mouvement étant nulle, l'accélération est constamment dirigée suivant la normale principale et constamment égale à :

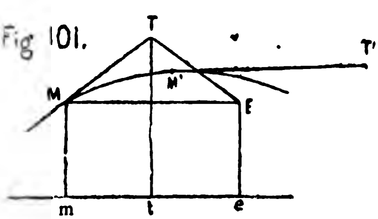
$$\frac{v^2}{\rho}.$$

Si, de plus, le mobile se meut sur un cercle, l'accélération est constamment dirigée suivant le rayon du cercle et égale à :

$$\frac{v^2}{r}.$$

12. Projection de l'accélération sur un axe. — Soient : $\mathrm{MT} = v$, $\mathrm{M'T'} = v + dv$ les vitesses du mobile sur sa trajectoire aux temps t et $t + dt$. En menant ME égale et parallèle à M'T', TE sera la variation géométrique de la vitesse pendant le temps dt. Or si on projette le mouvement du point sur un axe,

Fig. 101.



mt projection de MT et me projection de ME seront les vitesses dans le mouvement projeté aux temps t et $t + dt$. Par conséquent te projection de TE sera la variation de la vitesse dans le mouvement projeté pendant le temps dt. Donc l'accélération

$$\frac{te}{dt}$$

du mouvement projeté est bien la projection de l'accélération

$$\frac{\mathrm{TE}}{dt}$$

du mouvement dans l'espace.

Le même théorème a lieu si on projette le mouvement sur un plan.

13. On déduit de là un moyen de trouver l'accélération totale d'un point mobile quand on connaît en fonction du temps ses coordonnées x, y, z relativement à un système d'axes concourants Ox, Oy, Oz. Les quantités x, y, z sont en effet les distances à l'origine des trois points projections. Comme ces points se meuvent en ligne droite, ils ont pour accélération :

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ce sont les projections de l'accélération totale Γ sur chacun des axes, chaque projection étant faite parallèlement au plan des deux autres. Si les axes sont rectangulaires, on a :

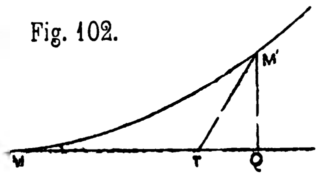
$$\Gamma = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

et pour les cosinus des angles que cette droite fait avec les axes :

$$\cos\lambda = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\Gamma}, \quad \cos\mu = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\Gamma}, \quad \cos\nu = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\Gamma}.$$

14. Autre manière de considérer l'accélération totale. — Soient M et M′ les positions du mobile aux temps t et $t+dt$.

Fig. 102.



Portons sur la tangente au point M une longueur MT égale à vdt, v étant la vitesse en M. Nous allons démontrer que l'accélération est parallèle à TM′ et est égale à :

$$TM' \times \frac{2}{dt^2}.$$

Pour le démontrer, nous allons projeter TM′ sur la tangente et la normale principale en M et évaluer ces deux projections.

Soit σ l'axe infiniment petit MM′. Les deux premières dérivées de σ par rapport au temps sont pour $t=0$ la vitesse v et l'accélération tangentielle $\frac{dv}{dt}$; on aura donc par la formule de Maclaurin :

$$MM' = \sigma = vdt + \tfrac{1}{2}\frac{dv}{dt}dt^2. \tag{1}$$

En négligeant les infiniment petits du troisième ordre, cette expression représente avec le même degré d'approximation la projection MQ de l'arc MM′ sur la tangente. On a donc aussi :

$$MQ = vdt + \tfrac{1}{2}\frac{dv}{dt}dt^2,$$

par suite :

$$TQ = \tfrac{1}{2}\frac{dv}{dt}dt^2,$$

$$TQ \times \frac{2}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Reste à démontrer que l'on a :

$$M'Q \times \frac{2}{dt^2} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Or, on sait par une formule d'analyse bien connue, que l'on a :

$$QM' = \frac{\overline{MM'}^2}{2\rho}.$$

Remplaçant MM′ par sa valeur (1) et négligeant toujours les termes d'ordre supérieur au second, on aura :

$$QM' = \tfrac{1}{2}\frac{v^2}{\rho}\,dt^2$$

ou

$$QM' \times \frac{2}{dt^2} = \frac{v^2}{\rho}.$$

On voit donc que la quantité $TM' \times \frac{2}{dt^2}$, a les mêmes projections que l'accélération totale sur la tangente et la normale principale, et que par conséquent elle lui est égale.

CHAPITRE III

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

15. Nous n'étudierons que le mouvement d'un solide invariable, c'est à dire d'un solide tel que tous ses points restent à des distances invariables les uns des autres. Pour définir le mouvement d'un pareil solide, il suffit de donner celui de trois de ses points non en ligne droite; en effet, un quatrième point quelconque peut être considéré comme le sommet d'un tétraèdre invariable qui sera parfaitement déterminé lorsque sa base le sera elle-même.

16. Mouvement de translation. — On appelle *translation* un mouvement tel que tous les points du solide décrivent à chaque instant pendant le même temps infiniment petit dt des arcs infiniment petits égaux en grandeur, direction et sens. Dans un pareil mouvement, les vitesses des différents points du corps sont à chaque instant égales et parallèles, et une droite ou un plan tracés dans le solide se déplacent toujours parallèlement à eux-mêmes.

17. Mouvement de rotation. — Si deux points A et B du solide sont fixes, le solide ne peut que tourner autour de la droite qui joint ces deux points. Chaque point du solide décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe AB et dont le centre est sur cet axe. Il est facile de voir que les différents points du solide tournent autour de l'axe d'un angle égal pendant le même intervalle de temps. Soit M un point situé à l'unité de distance de l'axe, soit $d\theta$ l'angle dont ce point tourne autour de l'axe dans le temps dt. La quantité

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

est dite la vitèsse angulaire du solide. En général cette vitesse varie à chaque instant, à moins que le mouvement de rotation ne soit uniforme. En même temps qu'un point situé à l'unité de distance de l'axe a une vitesse ω, un point situé à une distance r a une vitesse

$$r\omega.$$

18. Mouvement d'une figure plane dans son plan. — Théorème. — *Tout déplacement d'une figure plane dans son plan peut être produit par une rotation autour d'un point fixe.* Supposons qu'un plan mobile glisse sur un plan fixe, la position d'une figure dans le plan mobile sera parfaitement déterminée si l'on connaît les positions de deux de ses points. Supposons que la droite AB vienne occuper la position A'B'; menons des perpendiculaires aux droites AA', BB' en leurs milieux, ces perpendiculaires se couperont en un point O. De l'égalité des triangles AOB, A'OB' on conclut facilement l'égalité des angles AOA', BOB' et l'on voit que la figure peut être amenée de sa première position à la deuxième par une rotation autour du point O. A mesure que le déplacement AA' diminue, le point O tend vers une position limite O, qui porte le nom de *centre instantané de rotation*.

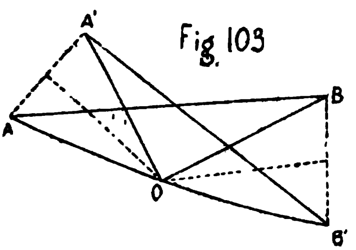


Fig. 103

Remarque. — Considérons la figure à un instant quelconque, et supposons que son déplacement, au lieu d'être fini, soit infiniment petit; l'arc AA' parcouru par un point A de la figure différera infiniment peu de la corde AA', et, par conséquent, comme ce mouvement peut être produit par une rotation autour du centre instantané O_1, l'arc AA' différera infiniment peu de l'arc de cercle décrit du point O_1 comme centre avec O_1A comme rayon. On voit donc que les vitesses des différents points de la figure sont les mêmes à un instant quelconque que si les différents points de la figure tournaient d'un angle infiniment petit autour d'un certain point O_1. On conclut de là que les normales aux trajectoires des différents points de la figure mobile concourent à chaque instant en un même point. De là une méthode pour mener la normale et par suite la tangente à certaines courbes.

Ier Exemple. — On sait que si une droite AB de longueur constante se meut entre deux axes rectangulaires, un point quelconque M de cette droite décrit une ellipse. Pour mener la normale à cette ellipse au point M, remarquons que les normales aux trajectoires décrites par les points A et B sont les perpendiculaires AO' et BO' aux axes. O' est donc le centre instantané de rotation pour la position AB de la droite mobile et par conséquent $O'M$ est la normale à l'ellipse en M.

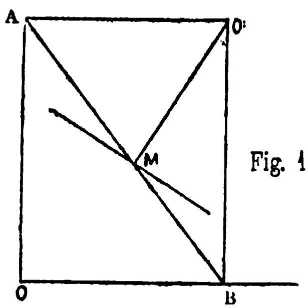


Fig. 104.

II. — Soit encore AB une droite de longueur constante qui se meut entre deux cercles, les normales aux trajectoires des points A et B sont les rayons CA, $C'B$ des cercles, leur intersection O est le centre instantané de rotation et OD

la normale à la trajectoire décrite par un point D de la droite.

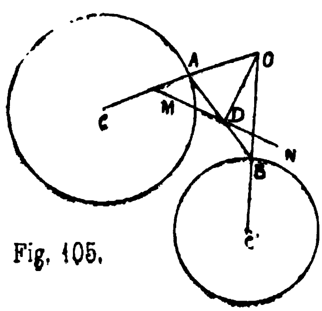


Fig. 105.

THÉORÈME. — *On peut se représenter le mouvement d'une figure plane dans son plan, en faisant rouler une courbe mobile sur une courbe fixe sans glissement.*

Pour arriver à nous représenter nettement le mouvement continu d'une figure plane dans son plan, supposons que la figure mobile tourne d'abord d'un angle α autour d'un point O, puis d'un angle α' autour d'un point O$'$, puis d'un angle α'' autour d'un point O$''$, etc.; traçons $OO_1' = OO'$ et faisant avec OO' un angle α; menons par O_1' la droite $O_1'K$ telle que l'angle $OO_1'K = OO'O''$, et la droite $O_1'O_1'' = O'O''$ telle que $O_1''O_1'K = \alpha'$, etc.

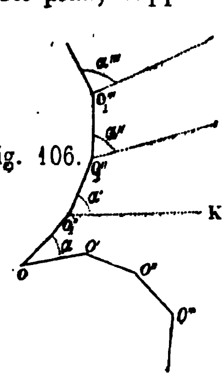


Fig. 106.

La rotation autour du point O de l'angle α amènera OO_1' sur OO' et fera coïncider $O_1'K$ avec $O'O''$; la rotation autour de O$'$ de α' amènera $O_1'O_1''$ sur $O'O''$. On voit donc que le premier polygone roulera sur le second.

Considérons maintenant le mouvement d'une figure plane dans son plan. Les différentes positions du centre instantané de rotation formeront une courbe dans le plan fixe. Considérons les différents points de la figure qui coïncideront successivement avec les différentes positions du centre instantané de rotation, nous aurons une deuxième courbe. Il est clair que le mouvement de la figure peut être produit par le roulement de la deuxième courbe sur la première sans glissement.

19. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. — Lorsqu'un corps solide a un point fixe, il est clair que la position du corps sera complètement déterminée si on connaît les positions de deux de ses points. Soit O le point fixe, décrivons du point O comme centre une sphère avec un rayon quelconque. Cette sphère déterminera une certaine figure dans le corps. Deux points A et B de cette figure viendront en A′, B′ dans la deuxième position du corps. Joignons AB, A′B′ par des arcs de grand cercle, et menons des arcs de grands cercles perpendiculaires aux arcs de grand cercle AA′, BB′ en leurs milieux. Ces arcs se couperont en un point P, et il est clair que l'arc AB peut être amené de sa première position à la deuxième par une rotation autour du point P, autrement dit que le corps peut être amené de la première position à la deuxième par une rotation autour de l'axe OP. Donc :

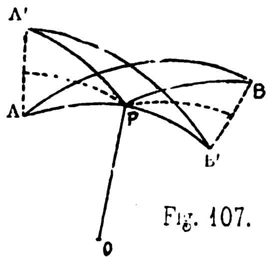


Fig. 107.

THÉORÈME. — *Tout déplacement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être produit par une rotation autour d'un axe fixe.*

REMARQUE. — Si le mouvement du corps solide, au lieu d'être fini, est infiniment petit, l'axe de rotation OP tendra vers une limite OP_1 qui est *l'axe instantané de rotation* à l'instant considéré. Tout mouvement fini d'un corps solide pouvant être décomposé en une suite de mouvements infiniment petits, on voit que tout déplacement fini du corps solide peut être produit par une suite de rotations infiniment petites autour d'une série d'axes successifs qui passent tous par le point O et dont l'ensemble détermine une surface conique. Considérons un des déplacements infiniment petits du solide qui amène un point A du corps en A', la vitesse du point A sera égale à l'arc AA' réellement parcouru par le point A divisé par dt, mais le mouvement infiniment petit du corps solide peut être produit par une rotation infiniment petite autour d'un axe OP_1, rotation dans laquelle le point A décrit un arc de cercle infiniment petit AA'. Cet arc de cercle étant, à la limite, égal à l'arc réellement parcouru par le point A, on voit que :

Les vitesses des différents points du corps sont à chaque instant les mêmes que si le corps tournait autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire déterminée.

20. Mouvement le plus général d'un corps solide. — Occupons-nous d'abord du mouvement fini d'un corps solide. Soient A, B, C... les positions initiales de différents points du corps; A', B', C'... leurs positions finales. On peut amener le corps de la première position à la deuxième en donnant à tous ses points une translation égale et parallèle à AA', puis en le faisant tourner d'un angle déterminé autour d'un axe convenablement choisi passant par le point A'. Le mouvement du corps solide peut donc être produit par une translation et une rotation. Il y a une infinité de manières de produire le mouvement du corps solide par la combinaison d'une translation et d'une rotation, car au lieu de partir du point A nous aurions pu partir du point B par exemple; mais dans ces différents systèmes de deux mouvements il y a toujours trois choses qui restent constantes :

1° *La direction de l'axe de rotation ne change pas.*

Supposons qu'au premier système de deux mouvements composés d'une translation égale et parallèle à AA' et d'une rotation autour d'un axe $A'x$, on substitue une translation égale et parallèle à BB', suivie d'une rotation autour d'un axe $B'y$, je dis que les deux axes $A'x$, $B'y$ sont parallèles. En effet, soit P un plan perpendiculaire à $A'x$, la translation et la rotation autour de $A'x$ l'amèneront dans une position P' parallèle à P qui est sa position finale. Or, la translation BB' conserve au plan P sa direction, tandis que la rotation autour de $B'y$ l'altère si $B'y$ n'est pas parallèle à $A'x$.

2° *La translation projetée sur l'axe de rotation conserve la même valeur.*

Donnons au corps une translation égale et parallèle à AA', puis une rotation autour de $A'x$. La translation amènera B en B_1, la rotation B_1 en B'. Or, comme B_1B' est situé dans un plan perpendiculaire à l'axe, sa projection sur l'axe est nulle. La projection de BB' sur l'axe est donc égale à celle de BB_1, c'est à dire à la projection de AA'.

3° *L'angle dont il faut faire tourner le corps conserve une valeur constante.*

En effet, considérons une droite L située dans un plan P perpendiculaire à la direction commune des axes, la translation AA' et la rotation autour de $A'x$ l'amèneront dans une position L' située dans un plan P' parallèle à P. La translation BB' ne change pas la direction de la droite, et comme la rotation autour de $B'y$ doit l'amener en L', il faut que cette rotation soit la même que la première et égale à l'angle des droites L et L'.

21. Axe central. — Parmi les différents systèmes d'une translation et d'une rotation, il en existe un particulièrement remarquable, c'est celui où la translation est parallèle à l'axe de rotation. Si nous considérons un plan P perpendiculaire à la direction commune des axes, pour amener une figure située dans ce plan de sa position initiale à sa position finale lorsque le plan est en P', il suffit de lui donner une translation égale et parallèle à la plus courte distance des deux plans, puis une rotation autour d'un point O situé dans le plan P' ou autour d'un axe OZ perpendiculaire au plan P', et comme le point O est unique, l'axe OZ est aussi unique.

Il n'existe donc qu'un seul axe pour lequel la translation est parallèle à l'axe de rotation. On voit alors que le mouvement du solide consiste dans un *glissement* le long d'un axe suivi d'une *rotation* autour du même axe. Quand une vis pénètre dans son écrou, elle glisse le long de l'axe et en même temps elle tourne autour du même axe, mais rien n'empêche de supposer que la rotation totale a succédé au glissement total; de même que dans le mouvement d'un corps solide on peut parfaitement supposer que le glissement et la rotation s'effectuent simultanément. On peut donc assimiler le mouvement d'un corps solide, en tant qu'il s'agit d'un déplacement *fini*, à un mouvement hélicoïdal; dans ce mouvement, les différents points du solide décrivent des arcs d'hélice de même pas situés sur des cylindres concentriques.

Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que du déplacement *fini* d'un corps solide. Si le déplacement, au lieu d'être *fini*, est *infiniment petit*, on peut encore l'obtenir à l'aide du glissement le long d'un axe suivi d'une rotation autour du même axe, qui prend alors le nom d'*axe instantané* de rotation et de glissement.

Si, pendant le temps infiniment petit dt, le corps glisse le long de l'*axe instantané* de la quantité dz et tourne autour de l'axe de l'angle $d\alpha$, l'arc élémentaire parcouru par un point du solide situé à une distance r de l'axe sera égal à :

$$\sqrt{dz^2 + r^2\, d\alpha^2},$$

et la vitesse V du même point sera par conséquent :

$$\sqrt{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}.$$

22. Mouvement continu le plus général d'un corps solide. — Le mouvement continu d'un corps solide pouvant être considéré comme une suite de mouvements infiniment petits ou de mouvements *élémentaires*, on peut se faire une idée de ce mouvement de la manière suivante.

Chaque glissement et chaque rotation infiniment petits se font autour d'un *axe instantané* dont l'ensemble constitue une surface S. Désignons par A_1, A_2, A_3... les génératrices successives de cette surface et considérons le corps au moment où vont s'effectuer les deux mouvements élémentaires autour de A_1.

On peut concevoir dans le corps une série de droites que la suite des mouvements élémentaires amènera successivement à coïncider avec A_2, A_3... ; désignons-les par A'_2, A'_3..., leur ensemble formera une deuxième surface réglée S′. Il est facile de voir que les deux surfaces S et S′ ont non seulement constamment une génératrice commune, mais encore qu'elles sont constamment tangentes le long de cette génératrice commune. En effet, le glissement le long de A_1 n'empêche pas les deux surfaces d'avoir une génératrice commune, mais la rotation autour de A_1 amenant la génératrice A'_2 à coïncider avec A_2, on voit qu'à la fin de chaque série de deux mouvements élémentaires les deux surfaces ont deux génératrices infiniment voisines communes, autrement dit qu'elles sont tangentes le long d'une génératrice. On voit donc qu'on peut se faire une idée du mouvement du corps solide en imaginant que la surface S roule sur la surface S′, chaque roulement élémentaire étant accompagné d'un glissement élémentaire le long d'une génératrice commune.

CHAPITRE IV

MOUVEMENT COMPOSÉ ET MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT.

23. Supposons qu'un point matériel soit en mouvement dans un système S formé par exemple de trois axes coordonnés, et que le système S tout entier et avec lui le point M soit en mouvement dans un système S′ que nous supposons fixe. Pour un observateur faisant partie du système S′ le mouvement du point M, tel qu'il a lieu réellement, est le mouvement *absolu* de ce point, et pour un observateur faisant partie du système S, le mouvement du point M est le mouvement *relatif* du point. Enfin, le mouvement du système S dans le système S′ porte le nom de mouvement d'*entraînement*.

En général les différents points du système S auront dans le système S′ des mouvements différents; mais il y a un cas particulier remarquable à considérer : c'est celui où les différents points du système S ont constamment dans des temps égaux des déplacements égaux et parallèles. On dit alors que le système S est animé, par rapport au système S′, d'un mouvement de translation. Dans le mouvement de translation, les vitesses des différents points du système S sont constamment égales et parallèles.

On peut se proposer de trouver le mouvement *absolu* d'un point, connaissant son mouvement *relatif* et son mouvement d'*entraînement*, cela s'appelle *composer* deux mouvements; et il est clair que l'on peut se proposer de composer plus de deux mouvements. Par exemple, on peut chercher le mouvement *absolu* d'un point, connaissant :

1° *Son mouvement relatif dans un système* S ;

2° *Le mouvement d'entraînement du système* S *dans un système* S′ ;

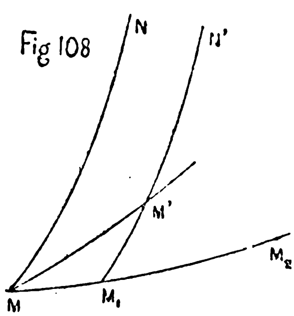
3° *Le mouvement d'entraînement du système* S′ *dans un système* S″ *supposé fixe.*

Il est clair aussi qu'on peut se proposer de trouver le mouvement *relatif*, connaissant le mouvement *absolu* et le mouvement d'*entraînement;* ou le mouvement d'*entraînement*, connaissant le mouvement *absolu* et le mouvement *relatif*. Il existe, relativement à la composition des mouvements, deux lois remarquables sur la composition des vitesses et des accélérations, que nous allons nous occuper de faire connaître.

24. Composition des vitesses. — THÉORÈME. — *La vitesse dans le mouvement absolu est à chaque instant la résultante géométrique de la vitesse dans le mouvement relatif et de la vitesse dans le mouvement d'entraînement.*

Soit M la position du mobile au temps t, MN sa trajectoire relative à cet instant, c'est à dire la courbe qu'il parcourrait si le mouvement d'entraînement s'arrêtait à partir du temps t. Le point M considéré comme un point du système S parcourt dans le système S′ une certaine trajectoire MM_1M_2, et au bout du temps $t + dt$ le point M considéré comme faisant partie du système S est venu en M_1 sur cette trajectoire; mais on peut supposer que le point M, en même temps qu'il se meut sur la courbe MM_1M_2, entraîne avec lui sa trajectoire relative. Cette trajectoire se déplacera paral-

Fig 108

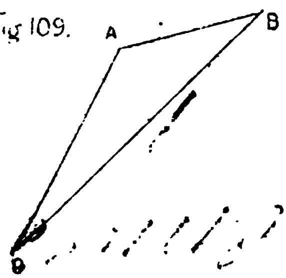


lèlement à elle-même si le mouvement du système S dans le système S′ est un mouvement de translation. Mais en général il n'en sera pas ainsi : cette trajectoire relative occupera, par exemple la position $M_1M'N'$ au temps $t + dt$, et comme pendant le temps dt le point M s'est déplacé sur sa trajectoire relative, il se trouve réellement en M′ au temps $t + dt$, en sorte que la trajectoire absolue du point M est une certaine courbe passant par les points M et M′.

Or, si le temps dt est infiniment petit, les arcs MM', MM_1, M_1M' peuvent être remplacés par leurs cordes, et comme la droite MM' est la résultante géométrique des droites MM_1, M_1M', on voit en amplifiant ces trois droites dans le rapport $\frac{1}{dt}$, que la vitesse dans le mouvement absolu est la résultante géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement du point M.

25. Soit OA la vitesse relative et AB la vitesse d'entraînement du point M. On peut considérer OA comme la résultante de OB et de BA. Donc :

Fig 109.



La vitesse relative d'un point est la résultante de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire.

La règle pour la composition des vitesses peut évidemment être généralisée dans le cas où on aurait plus de deux mouvements.

26. Composition des accélérations. — Supposons d'abord que le mouvement du système S dans le système S′ soit un mouvement de translation.

Soient AB la trajectoire relative du point M au temps t, A′B′ cette trajectoire au temps $t + dt$, M′ la position du point au temps $t+dt$ sur la nouvelle position de sa trajectoire relative. Pendant le temps dt le point aura parcouru un certain arc MM' dans son mouvement absolu. Par un point arbitraire O menons une droite OD égale et parallèle à la vitesse

Fig. 110.

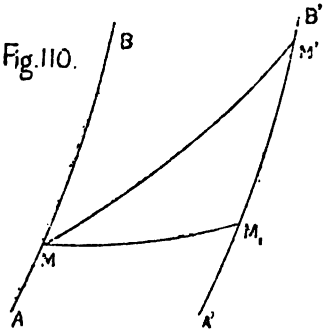
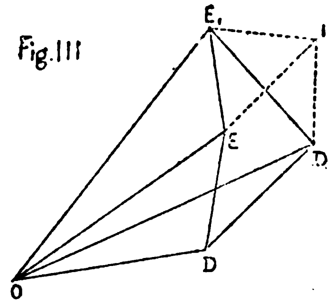


Fig. 111



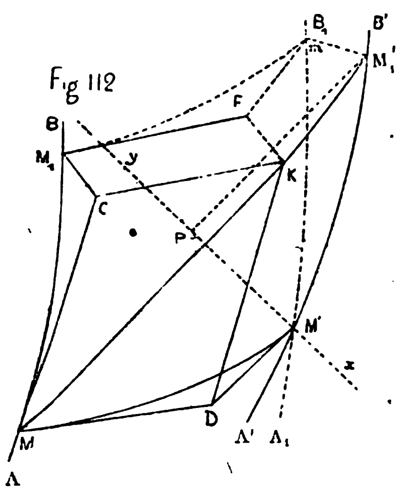
d'entraînement du point M au temps t, et DE égale et parallèle à sa vitesse relative au même instant, OE sera sa vitesse absolue au temps t. Par une construction analogue nous obtiendrons sa vitesse absolue OE_1 au temps $t+dt$, en sorte que EE_1 est la variation géométrique de la vitesse absolue pour l'intervalle dt. Construisons le parallélogrammé EDD_1I, dont deux côtés sont ED et DD_1 et joignons IE_1.

EE_1 est la résultante géométrique de EI ou DD_1 et de IE_1, c'est à dire de la variation géométrique de la vitesse dans le mouvement d'entraînement et dans le mouvement relatif. Si nous amplifions les trois longueurs dans le rapport $\frac{1}{dt}$, l'une des trois droites amplifiées étant encore la résultante des deux autres, nous obtenons ce théorème :

Lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, l'accélération d'un point est à chaque instant la résultante géométrique des accélérations du point dans son mouvement relatif et dans son mouvement d'entraînement.

27. Remarque. — La démonstration précédente ne s'appliquerait plus si le mouvement d'entraînement n'était pas un mouvement de translation. En effet, nous avons comparé les vitesses relatives du point M au temps t et $t + dt$. Mais si le système S n'est pas animé d'un mouvement de translation dans le système S', la droite IE_1 ne représente plus la variation de la vitesse relative, car pendant le temps dt la droite qui représente la vitesse relative du point M au temps t a tourné d'un certain angle ; et pour avoir la variation de la vitesse relative, il faut comparer la vitesse relative du point M au temps $t + dt$ avec la droite qui représente réellement au temps $t + dt$ la vitesse relative du point M au temps t. De même EE_1 ne représente pas la variation de la vitesse absolue pendant l'intervalle de temps dt, parce que, pour avoir la variation de la vitesse absolue pendant l'intervalle dt, il faut comparer la vitesse absolue au temps $t + dt$ avec la droite qui représente la nouvelle position de la vitesse absolue au temps t à l'instant $t + dt$.

Fig 112



Nous allons donner le théorème général sur la composition des accélérations lorsque le mouvement d'entraînement est quelconque.

28. Théorème de Coriolis. — Soient AB la trajectoire relative du point M au temps t, A'B' cette trajectoire au temps $t + dt$, MM' la trajectoire du point M considéré comme appartenant au système S. En vertu du mouvement d'entraînement du système S dans le système S', le point M sera venu en M' au temps $t + dt$ et sa trajectoire relative en $M'M'_1$. Si nous prenons les arcs $M'M'_1 = MM_1 = vdt$, v étant la vitesse relative, nous aurons en M'_1 la position réelle du mobile au temps $t + dt$.

Menons en M des tangentes MC, MD aux courbes AB, MM′ et portons sur ces tangentes des longueurs MC, MD égales à vdt et $v'dt$, v et v' étant les vitesses relatives et d'entraînement du point M. En achevant le parallélogramme MCKD, MK sera la direction de la vitesse absolue V du point M, et l'on aura :

$$MK = Vdt;$$

par conséquent KM'_1 sera la direction de l'accélération du point M dans son mouvement absolu et l'on aura la grandeur de cette accélération en multipliant KM'_1 par $\frac{2}{dt^2}$.

Mais pour amener la trajectoire relative dans la position A′B′, nous pouvons d'abord donner au système S un mouvement de translation qui amènera cette trajectoire relative en A_1B_1, puis un mouvement de rotation autour d'un axe xy passant par le point M′ qui l'amènera dans sa véritable position A′B′. Si le mouvement de rotation n'avait pas lieu, le point M serait parvenu en un point m tel que :

$$\text{l'arc } M'm = MM_1 = vdt,$$

la rotation l'amène dans sa véritable position M'_1. Cela posé, achevons le parallélogramme M_1CKF et joignons Fm. La droite KM'_1 est la résultante géométrique des droites KF, Fm, mM'_1.

La première KF étant égale à M_1C, multipliée par $\frac{2}{dt^2}$ représente l'accélération J du mouvement relatif.

La deuxième $Fm = DM'$ multipliée également par $\frac{2}{dt^2}$ représente l'accélération dans le mouvement d'entraînement du point M.

Quant à la troisième mM'_1 nous allons la déterminer. Remarquons que si ω représente la vitesse angulaire de rotation du système S autour de l'axe xy et si p représente la longueur de la perpendiculaire abaissée du point m sur l'axe xy, on a :

$$mM'_1 = p\omega dt.$$

Or :

$$p = M'M'_1 \sin \alpha,$$

α désignant l'angle de l'axe instantané xy avec la tangente en M′ à la trajectoire relative; et comme :

$$M'M'_1 = v dt,$$

$$mM'_1 = v\omega dt^2 \sin \alpha,$$

cette quantité multipliée par $\frac{2}{dt^2}$ est donc égale à :

$$2\omega v \sin \alpha.$$

Par conséquent la quantité $KM'_1 \times \frac{2}{dt^2}$ ou l'accélération G dans le mouvement absolu est la résultante géométrique de trois accélérations :

1° L'accélération J dans le mouvement relatif;

2° L'accélération J′ dans le mouvement d'entraînement;

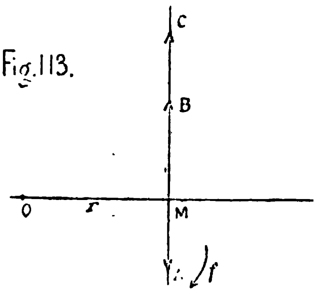
3° Une troisième accélération $J'' = 2\omega v \sin \alpha$ perpendiculaire au plan qui passe par la vitesse relative et l'axe instantané de rotation et dirigée dans le sens où la droite qui représente l'extrémité de la vitesse relative tend à se mouvoir dans la rotation autour de xy. On lui donne aussi le nom d'accélération complémentaire.

Ce théorème est dû à Coriolis.

29. Applications. I. — *Point en repos absolu par rapport à un système d'axes qui tourne uniformément autour d'une droite fixe.*

Soit M le point donné et supposons que la rotation ait lieu autour d'un axe vertical projeté en O dans le sens de la flèche f. Pour un observateur emporté avec les axes, le point semble décrire un cercle avec une vitesse $MB = \omega r$ égale et contraire à la vitesse d'entraînement $MA = \omega r$ qu'aurait le point M s'il était lié aux axes.

Fig. 113.



Cherchons l'accélération dans le mouvement absolu du point M. Les accélérations des mouvements relatif et d'entraînement sont chacune égales à $\omega^2 r$ et toutes deux dirigées de M vers O. Quant à l'accélération complémentaire, elle est égale à la vitesse que prend l'extrémité C d'une droite telle que $MC = 2MB$. En vertu d'une rotation ω autour de l'axe projeté en M, cette vitesse est :

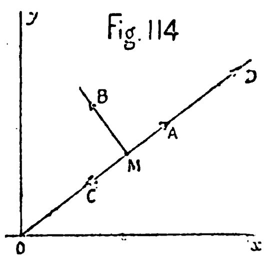
$$\omega \times MC = 2\omega^2 r,$$

et de plus elle est dirigée de O vers M.

Donc, cette dernière accélération détruit les deux premières et l'accélération du point M est nulle, ce qui était évident *à priori*.

II. — *Accélération d'un point qui se meut dans un plan et qui est rapporté à des coordonnées polaires.*

Fig. 114



On peut appliquer encore ici le théorème de Coriolis.

On peut supposer que le point glisse le long d'une droite OM, en même temps que cette droite tourne autour du point O, le premiér mouvement étant considéré comme mouvement relatif, le second comme mouvement d'entraînement.

Ces deux mouvements sont définis si on connaît en fonction du temps la distance OM $= \rho$ du point mobile sur la droite et l'angle $MOx = \omega$ que la droite OM fait avec une droite fixe Ox.

Cherchons l'accélération du point M.

L'accélération du mouvement relatif est égale à :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}.$$

Représentons-la sur la figure par MA.

L'accélération d'entraînement a une composante tangentielle égale à :

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{d\theta}{dt}\right) = \rho\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

et une composante centripète égale à :

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \rho\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Représentons-les respectivement par MB et MC. L'accélération complémentaire est égale à la vitesse qu'aurait un point D situé à une distance du point M double de la vitesse relative si on le faisait tourner de l'angle $\frac{d\theta}{dt}$ autour d'un axe projeté en M; elle est donc égale à :

$$2\frac{d\theta}{dt}\frac{d\rho}{dt},$$

et de plus dirigée de M vers B.

Les composantes tangentielle et normale de l'accélération sont donc :

$$\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{d\rho}{dt} \quad \text{et} \quad \rho\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

CHAPITRE V

COMPOSITION DES MOUVEMENTS D'UN CORPS SOLIDE.

30. Lorsqu'un corps solide est en mouvement par rapport à des axes mobiles, le mouvement du corps solide par rapport à ces axes est son *mouvement relatif* et le mouvement du corps solide par rapport à des axes fixes est son *mouvement absolu*.

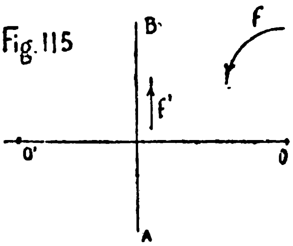
On peut se proposer de composer le *mouvement relatif* du corps solide avec le mouvement des axes mobiles considéré comme *mouvement d'entraînement*.

Nous allons nous occuper de la composition de ces deux mouvements lorsqu'il s'agit de deux *mouvements élémentaires*; on en déduira ensuite facilement la composition de deux mouvements quelconques d'un corps solide.

Composition de deux mouvements élémentaires d'un corps solide.

31. Composition de deux translations. — Il est facile de voir que le mouvement résultant est une translation dont la vitesse est la résultante géométrique des vitesses dans les mouvements composants. Car deux points décrivant en vertu de chaque translation pendant le temps dt des droites égales et parallèles, les résultantes géométriques de ces deux droites seront pour chaque point égales et parallèles.

32. Composition d'une translation et d'une rotation. — Considérons un solide animé à la fois d'une translation et d'une rotation autour d'un axe perpendiculaire à la direction de la translation. Soient V la vitesse de la translation, ω la vitesse angulaire de la rotation.

Fig. 115


Menons un plan quelconque perpendiculaire à l'axe de rotation. Soient O la projection de l'axe sur ce plan, AB la direction de la translation. Abaissons du point O une perpendiculaire sur AB et prenons sur cette perpendiculaire une longueur OO' telle que

$$V = \omega \times OO'.$$

Il est facile de voir que le point O' reste fixe pendant les deux mouvements élémentaires du corps solide. En effet, pendant le temps dt, le point O' s'élève au-dessus de OO', en vertu de la translation, d'une quantité égale à :

$$Vdt;$$

en vertu de la rotation autour du point O, il s'abaisse au-dessous de cette même droite, de :

$$OO' \times \omega dt \quad \text{ou de} \quad Vdt.$$

Le point O' reste donc immobile et le mouvement du corps solide est une rotation autour de l'axe projeté en O'. Il est facile de voir que la vitesse angulaire de cette rotation est ω. En effet, en vertu de la translation, le point O s'élève pendant le temps dt de la quantité :

$$Vdt = \omega \times OO' \times dt,$$

et il ne se déplace pas en vertu de la rotation autour du point O. Or, si nous appelons ω' la vitesse angulaire de rotation du corps autour du point O', le déplacement du point O en vertu de cette rotation est :

$$OO' \times \omega' dt.$$

On a donc :

$$OO' \times \omega' dt = \omega \times OO' dt,$$

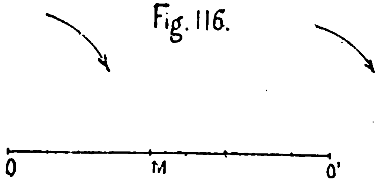
ou :

$$\omega' = \omega.$$

Quant au sens de la rotation autour du point O′, il est facile de voir qu'il est le sens de la rotation autour du point O.

33. Composition de deux rotations autour de deux axes parallèles. — Soient O et O′ les projections des deux axes sur un plan perpendiculaire à ces axes. Supposons d'abord que les deux rotations soient de même sens et qu'elles aient lieu avec les vitesses angulaires ω et ω' autour des axes. Prenons sur la droite un point M tel que l'on ait :

Fig. 116.



$$(1) \qquad \frac{OM}{O'M} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Il est facile de voir que le point M reste immobile, car il se déplace de deux quantités égales et de sens contraires

$$\omega \times OM\, dt \quad \text{et} \quad \omega' \times O'M\, dt,$$

en vertu de chacune des rotations autour des axes O et O′. Le mouvement résultant est donc une rotation autour du point M. Pour trouver la vitesse angulaire ω_1 de cette rotation, remarquons que le point O′ se déplace, en vertu de la rotation autour du point O, de la quantité

$$\omega \times OO'\, dt,$$

et en vertu de la rotation autour du point M, de la quantité

$$\omega_1 \times MO'\, dt.$$

On a donc :

$$\omega_1 \times MO' = \omega \times OO',$$

ou :

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{OO'}{MO'}.$$

Mais de la relation (1) on déduit :

$$\frac{\omega + \omega'}{\omega} = \frac{OO'}{MO'},$$

donc :

$$\omega_1 = \omega + \omega'.$$

Quant au sens du mouvement résultant, il est évidemment le même que celui des deux mouvements composants.

34. En raisonnant comme nous venons de le faire, on verra que si les deux vitesses angulaires sont de sens contraires, la composition des deux mouvements donne encore lieu à une rotation avec une vitesse angulaire égale à la différence des deux vitesses angulaires dans le sens de la plus grande. Pour obtenir la position de l'axe de rotation O_1, supposons $\omega > \omega'$; il faudra prendre sur la droite OO', prolongée au delà du point O, un point O_1 dont les distances aux points O et O' soient dans le rapport inverse des vitesses de rotation ω et ω'.

35. Composition de deux rotations autour de deux axes concourants. — Axe représentatif d'une rotation. — Avant de nous occuper de la composition de deux rotations, nous allons donner un moyen de représenter les éléments caractéristiques de la rotation d'un corps solide. On porte sur l'axe de rotation, à partir d'un point A, une longueur AO égale à la vitesse angulaire ω et dans un sens tel, qu'un observateur ayant les pieds en A et la tête en O voie le

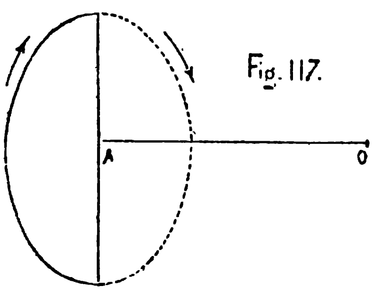
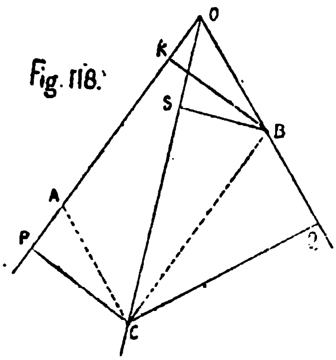


Fig. 117.

mouvement s'effectuer dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est à dire de gauche à droite. Cette droite OA ainsi déterminée est appelée l'*axe représentatif de la rotation.*

Cela posé, supposons qu'il s'agisse de composer deux rotations dont les *axes représentatifs* sont OA et OB. Le point O restant fixe en vertu de chacune des rotations, le mouvement résultant sera une rotation autour d'un axe passant par le point O. Je dis que cet axe est la diagonale du parallélogramme construit sur OA et OB. En effet, en vertu de la première rotation, un point C s'élève au-dessus du plan AOB de

Fig. 118.



$$\omega \times CPdt,$$

et en vertu de la deuxième, il s'abaisse au-dessous du même plan de :

$$\omega' \times CQdt.$$

Or, les deux triangles CAP, CBQ sont semblables et on a :

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{CA}{CB} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Les deux déplacements du point C sont donc égaux et de sens contraires. Le point C reste donc immobile, et par conséquent le mouvement est une rotation autour de l'axe OC.

Pour trouver la vitesse ω_1 de cette rotation, remarquons que le point B se déplace, en vertu de la rotation autour de OA, de la quantité

$$\omega \times BK\,dt,$$

et en vertu de la rotation autour de OC, de :

$$\omega_1 \times BS\, dt.$$

Or, $\omega \times BK$ représente l'aire du parallélogramme OABC, mais cette aire est aussi représentée par :

$$OC \times BS,$$

donc :

$$OC = \omega_1.$$

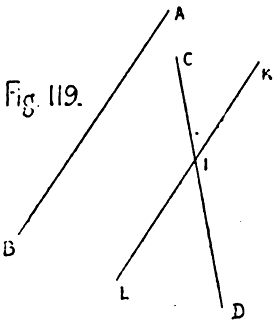
On voit donc que le mouvement résultant est une rotation dont l'axe *représentatif* est OC. *L'axe représentatif du mouvement résultant est la diagonale du parallélogramme construit sur les axes représentatifs des mouvements composants.*

36. Remarque. — Si on avait à composer plus de deux rotations autour d'axes concourants, le mouvement résultant serait encore une rotation et l'on obtiendrait l'*axe représentatif* de cette rotation en construisant le polygone des *axes représentatifs* des mouvements composants. En particulier, on composera trois rotations autour de trois axes concourants en construisant le parallélipipède dont les côtés sont les *axes représentatifs* des trois mouvements concourants. La diagonale de ce parallélipipède sera l'*axe représentatif* du mouvement composant.

On peut de même décomposer une rotation autour d'un axe OA en trois autres autour de trois axes Ox, Oy, Oz, en achevant le parallélipipède ayant OA pour diagonale et ses côtés dirigés suivant Ox, Oy, Oz. On obtiendra ainsi les *axes représentatifs* des trois mouvements composants.

37. Composition de deux rotations autour d'axes non situés dans le même plan. — Soient AB, CD les directions des deux axes de rotation, que nous supposerons non situés dans un même plan. Par un point quelconque I de CD menons KL parallèle à AB, nous pouvons, d'après ce que nous avons vu (32), décomposer la rotation autour de AB en une rotation autour de KL et une translation perpendiculaire au plan des deux axes AB, CD. La rotation autour de KL se composera avec la rotation autour de CD et donnera encore une rotation. Cette rotation combinée avec la translation donnera un mouvement hélicoïdal.

Fig. 119.



Composition de deux mouvements quelconques d'un corps solide.

38. Chacun des mouvements élémentaires pourra être remplacé par une translation et une rotation, les deux rotations donneront une rotation et une translation. On aura donc à combiner trois translations et une rotation; les trois translations se composeront en une translation unique qui, combinée avec la rotation, donnera un mouvement hélicoïdal.

39. Remarque importante sur la décomposition d'un mouvement élémentaire quelconque d'un corps solide. — Considérons un corps solide rapporté à trois axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz, et considérons un point du solide ou lié invariablement à lui qui coïncide avec le point O à l'origine du mouvement. Tout mouvement élémentaire du corps solide peut être remplacé par une translation égale et parallèle à celle du point O et en une rotation autour d'un axe passant par le point O. La translation peut être remplacée par trois translations parallèles aux axes Ox, Oy, Oz et la rotation par trois rotations autour des mêmes axes. Le mouvement élémentaire peut donc être remplacé par trois translations et trois rotations.

TROISIÈME PARTIE

DYNAMIQUE
DU POINT MATÉRIEL

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

1. Les lois de la dynamique n'ont pu être établies qu'en partant d'un certain nombre de principes ou vérités fondamentales, dont la connaissance a été puisée dans l'observation des faits. Ces principes ne sont pas d'une évidence absolue; il a même fallu des hommes de génie pour les démêler dans les phénomènes qui s'accomplissent sur la terre et dans l'univers. Aussi, la vérité de ces principes ne peut-elle être reconnue, *à priori*, d'une manière complète; on ne peut que faire concevoir leur existence, au moyen de certains exemples de phénomènes dans lesquels chacun d'eux se manifeste d'une manière spéciale. Mais leur exactitude est rendue incontestable par l'exactitude des conséquences qu'on en déduit, au moyen d'une suite de raisonnements rigoureux. La plus grande preuve de cette exactitude se trouve dans l'accord du mouvement des corps célestes observés avec les lois théoriques de ces mouvements, obtenues en se fondant sur les principes dont il s'agit. Ces principes sont au nombre de deux : le principe de l'inertie, et le principe des mouvements relatifs.

2. Principe de l'inertie de la matière. — Ce principe comprend deux parties :

1° *Si un point matériel est en repos dans l'espace, il reste en repos tant qu'aucune force n'agit sur lui;*

2° *Quand un point matériel est en mouvement, si aucune force n'agit sur lui, son mouvement est rectiligne et uniforme.*

Lorsqu'un point matériel est en repos, il faut qu'une force agisse sur lui pour le mettre en mouvement. Quand un point matériel est en mouvement, si son mouvement n'est pas rectiligne et uniforme, c'est qu'une force agit sur lui, modifiant soit la grandeur de la vitesse, soit sa direction, soit les deux à la fois. Quand le mouvement est rectiligne, et que la vitesse augmente, une force agit sur le mobile et le sollicite dans le sens du mouvement; elle le sollicite en sens contraire quand la vitesse diminue. Si le mouvement est curviligne, une force agit obliquement pour écarter le mobile de la ligne droite; dès que la force cesse d'agir, le mouvement redevient rectiligne et uniforme.

La première partie de ce principe paraît avoir été connue de toute antiquité; il n'en est pas de même de la seconde; ainsi, pendant très longtemps, les astronomes considéraient le mouvement circulaire et uniforme des planètes comme s'accomplissant naturellement, sans effort. C'est Kepler qui paraît avoir eu le premier la conception complète du principe de l'inertie, au commencement du dix-septième siècle. Peut-être y a-t-il été amené par l'observation, par exemple en considérant le mouvement d'une bille sur un plan poli, et en remarquant que le mouvement de la bille dure d'autant plus longtemps que le plan est plus poli, ou que la force qui agit sur la bille, le frottement contre le plan, est plus faible.

3. Principe des mouvements relatifs. — *Quand un système de points matériels ont un mouvement commun de translation dans l'espace, si une force agit sur l'un des points en particulier, le mouvement relatif que la force imprime à ce point dans le système est indépendant du mouvement général de translation du système, c'est à dire est le même que si le système était en repos.*

On aperçoit facilement par quel genre d'expériences on pourrait reconnaître la vérité de ce principe, si la terre était immobile. On n'aurait qu'à donner un mouvement uniforme commun à un système de points mobiles les uns par rapport aux autres, on appliquerait à l'un d'eux une force dont on ferait varier la grandeur et l'intensité, et l'on reconnaîtrait que le mouvement relatif est tout à fait indépendant du mouvement uniforme commun, et le même que si ce dernier n'existait pas. On vérifierait cela sur un bateau en mouvement sur un fleuve; cela serait plus difficile à vérifier si le mouvement de translation n'était pas rectiligne et uniforme. Mais le mouvement de translation de la terre autour du soleil fait qu'il nous est impossible d'observer des mouvements absolus, et par suite d'arriver à la démonstration rigoureuse de ce principe.

A l'aide des principes précédents, nous pouvons déterminer aisément le mouvement que prendra un point matériel soumis à l'action de forces données; nous allons commencer par un cas simple qui fera l'objet du théorème suivant :

4. Théorème. — *Une force constante, en grandeur et en direction, agissant sur un point matériel partant du repos, lui imprime un mouvement rectiligne uniformément varié.*

Soient O la position initiale du point matériel, F la force constante dirigée suivant OX; il est évident que si le point matériel part du repos, il se mouvra suivant OX; partageons le temps en petits intervalles égaux θ. Après le premier instant θ, le mobile a parcouru l'espace OA et possède une certaine vitesse a; si la force cessait d'agir, le mouvement deviendrait rectiligne et uniforme avec la vitesse a d'après le principe de l'inertie. Imaginons un système de points matériels O′, O″... identiques au point O, partant du repos et sollicités par des forces égales et parallèles à F : au bout du temps θ, tous ces points auront parcouru des longueurs O′ A′, O″A″ égales et parallèles à OA; après le temps θ, supprimons ces forces : tous les points seront animés d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme avec la vitesse a. Faisons maintenant agir la force F sur le point O seul; d'après le principe des mouvements relatifs, elle agira sur ce point en mouvement comme s'il était en repos, et lui communiquera au bout du temps θ une vitesse relative a, et par conséquent la vitesse absolue du point O au bout du temps 2θ sera $2a$. Si nous supposons maintenant que le point O fasse partie d'un système animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme avec la vitesse $2a$ et que la force F agisse sur le point O seulement, au bout du temps θ elle lui communiquera une vitesse relative a. Sa vitesse absolue au bout du temps 3θ sera donc $3a$. La vitesse varie donc de quantités égales en des temps égaux. Le mouvement est uniformément varié et on a :

$$v = \gamma t.$$

Remarque. — Si le point ne partait pas du repos, mais avait la vitesse v_0 dirigée dans le sens de la force F, le mouvement serait uniformément accéléré et l'on aurait :

$$v = v_0 + \gamma t.$$

Car, si le point O fait partie d'un système animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme avec la vitesse v_0, et si la force agit uniquement sur le point O, au bout du temps t elle lui communiquera une vitesse relative γt et par conséquent ce point aura une vitesse absolue $v_0 + \gamma t$.

5. Réciproquement. — *Si un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié, la force que sollicite le mobile est constante.*

Soit, en effet, dans le mouvement observé :

$$v = v_0 + \gamma t.$$

Le mouvement n'étant pas uniforme, le point M est soumis à une certaine force : je dis que cette force est constante. Pour le montrer, supposons qu'on fasse agir sur le point partant de sa position initiale avec la vitesse v_0, une force constante F′, nous aurons un mouvement uniformément varié dans lequel la vitesse v' sera :

$$v' = v_0 + \gamma' t.$$

γ' est nul avec F′, et augmente constamment avec F′. Nous trouverons donc une valeur F_1 de F′, telle que $\gamma' = \gamma$; alors, v' sera constamment égal à v. Je dis que F_1 est constamment égal à F. Car, si entre les époques T et T′ on avait constamment $F < F_1$, il serait impossible que le mobile ayant la même vitesse à l'époque T sous l'action des forces F ou F_1, ait aussi la même vitesse à l'époque T′; car, dans l'intervalle, l'accroissement de vitesse dû à la force F_1 devrait être plus grand que l'accroissement de vitesse dû à la force F.

6. Application à la pesanteur. — L'expérience montre que le mouvement d'un corps qui tombe dans le vide, est uniformément accéléré; l'accélération est la même pour tous les corps. A Paris, la valeur de cette accélération est :

$$g = 9^{m},8088.$$

Le théorème précédent montre que la force qui produit le mouvement d'un corps est constante pendant toute la durée du mouvement; c'est la force qui sollicite le corps au départ, le poids P du corps.

7. Théorème II. — *Lorsque deux forces constantes agissent successivement sur un même point matériel partant du repos, elles lui impriment des mouvements uniformément variés dont les accélérations sont proportionnelles aux forces.*

Nous allons d'abord démontrer le *lemme* suivant :

Lemme. — Deux forces constantes F et F′, de même direction, agissant simultanément sur un même point matériel partant du repos, lui impriment un mouvement rectiligne uniformément accéléré, dont l'accélération est la somme des accélérations des mouvements dus aux forces agissant séparément sur le mobile. Soient, en effet, γ et γ' les accélérations de ces mouvements séparés; imaginons une série de points matériels, partant du repos et soumis chacun à la force constante F; ces points vont prendre le même mouvement uniformément accéléré d'accélération γ. La vitesse v de ce mouvement de translation sera, à l'époque t :

$$v = \gamma t.$$

Faisons maintenant agir la force F′ sur l'un des points seulement M du système; le mouvement relatif de ce point sera le même que si le mouvement de translation n'existait pas. Ce sera donc un mouvement uniformément accéléré, d'accélération γ', dont la vitesse v' sera :

$$v' = \gamma' t.$$

Le mouvement absolu du point M s'obtiendra en composant deux mouvements uniformément accélérés, de même direction; ce sera encore un mouvement uniformément accéléré, dont la vitesse V sera égale à $(\gamma + \gamma')$ t. L'accélération $\gamma + \gamma'$ de ce mouvement est bien la somme des accélérations des mouvements produits séparément par les forces F et F′.

Ce lemme s'étend à un nombre quelconque de forces;

l'accélération due à la force nF, n étant entier, est n fois l'accélération due à la force F.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé. Soient F et F′ les deux forces, γ et γ' les accélérations des mouvements uniformément accélérés qu'elles produiraient, si elles agissaient séparément sur un même point matériel partant du repos. Supposons que les forces F et F′ aient une commune mesure F″.

$$F = nF'', \quad F' = n'F''.$$

D'après le lemme précédent, on aura :

$$\gamma = n\gamma''; \quad \gamma' = n'\gamma'',$$

d'où :

$$\frac{F}{F'} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Il est facile d'étendre la démonstration au cas où les forces n'ont pas de commune mesure.

8. Définition de la masse. — Soient F, F′, F″... différentes forces constantes, γ, γ', γ''... les accélérations des mouvements qu'elles produisent en agissant séparément sur un même point matériel. On a, d'après le théorème précédent :

$$\frac{F}{F'} = \frac{\gamma}{\gamma'}, \quad \frac{F}{F''} = \frac{\gamma}{\gamma''} \ldots$$

On en conclut :

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} \ldots$$

Ainsi, quand différentes forces constantes agissent séparément sur un même point matériel, le rapport de chaque force à l'accélération correspondante est constant; ce rapport qui est constant pour un même point matériel, varie quand on passe d'un point matériel à un autre; il y a là quelque chose de particulier, de caractéristique, pour chaque point matériel; c'est ce qu'on nomme sa *masse*; ainsi, on a, en la désignant par m :

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} = \cdots = m,$$

d'où :

$$F = m\gamma, \quad F' = m\gamma', \quad F'' = m\gamma''.$$

Les points matériels n'entrent en dynamique que par cette constante : la masse. On voit que la masse est le rapport de deux nombres qui représentent l'un la force, l'autre l'accélération correspondante; le premier nombre dépend de l'unité de force, le second de l'unité de longueur et de l'unité de temps. On a choisi le *kilogramme* pour unité de force, le *mètre* pour unité de longueur, la *seconde* de temps moyen pour unité de temps. L'évaluation de la masse dépend de ces trois unités.

Dans le cas où la force F agissant sur le corps se réduit à son poids, γ devient égal à g et on a :

$$m = \frac{P}{g},$$

ce qui donne un moyen très simple d'évaluer la masse d'un corps.

On voit par là que la masse d'un corps est proportionnelle à son poids; il est facile de trouver le poids de l'unité de masse. Si, dans l'égalité ci-dessus, on fait $m = 1$, on a : $P = g$; ainsi, le corps dont la masse est 1 pèse g kilogrammes.

Densité. — Dans un corps homogène, des volumes égaux ont des poids égaux et, par suite, des masses égales; la masse est donc proportionnelle au volume, et l'on a, en désignant par D un coefficient constant, m la masse, V le volume :

$$m = VD.$$

D est la *densité;* on voit que c'est la masse de l'unité de volume.

Le *poids spécifique* p est le poids de l'unité de volume; soit donc P le poids du corps; on aura :

$$P = Vp = mg = VDg,$$

d'où :

$$D = \frac{p}{g};$$

telle est la relation qui lie la *densité* et le *poids spécifique* d'un corps.

Le poids spécifique de l'eau est le poids d'un mètre cube d'eau en kilog. $p = 1000$. On en déduit :

$$D = \frac{1000}{g}.$$

CHAPITRE II

MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

9. L'étude du mouvement rectiligne d'un point matériel repose sur le théorème suivant :

Théorème. — *Dans un mouvement rectiligne quelconque, l'accélération est à chaque instant égale à la force divisée par la masse.*

Nous avons déjà démontré le théorème pour une force constante, nous allons le démontrer pour une force d'intensité variable. Supposons qu'un point matériel, possédant une certaine vitesse initiale, soit sollicité par une force d'intensité variable, mais de direction constante, cette direction étant celle de la vitesse initiale ; il est évident que le mouvement du point sera rectiligne, varié, mais non uniformément varié. Soient γ l'accélération du mobile au temps t, F la valeur de la force à cet instant; considérons le mouvement entre le temps t et le temps $t + \Delta t$; désignons par v et $v + \Delta v$ les vitesses aux temps t et $t + \Delta t$, et soient dans cet intervalle F_1 et F_2 la plus petite et la plus grande valeur de F, en sorte que nous ayons pendant le temps Δt :

$$F_1 < F < F_2.$$

L'accélération correspondante à la force constante F_1 est $\gamma_1 = \frac{F_1}{m}$; si la force F restait constamment égale à F_1, elle produirait dans le temps Δt un accroissement de vitesse égal à $\frac{F_1}{m}\Delta t$; de même, si la force F était constamment égale à F_2, elle produirait l'accroissement de vitesse $\frac{F_2}{m}\Delta t$. L'accroissement de vitesse observé Δv sera évidemment compris entre les deux accroissements ci-dessus; donc :

$$\frac{F_1}{m}\Delta t < \Delta v < \frac{F_2}{m}\Delta t;$$

d'où :

$$\frac{F_1}{m} < \frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{F_2}{m}.$$

Si l'on fait tendre Δt vers zéro, $\frac{F_1}{m}$ et $\frac{F_2}{m}$ auront pour limite commune $\frac{F}{m}$ et l'on aura :

$$\frac{F}{m} = \frac{dv}{dt} = \gamma,$$

$$F = m\frac{dv}{dt}. \tag{1}$$

Telle est l'expression de la force dans un mouvement rectiligne quelconque; elle est de même signe que dv; de sorte qu'en employant cette formule, on regarde la force comme positive quand elle tend à augmenter la vitesse, et négative quand elle tend à la diminuer. Soit O un point fixe sur la droite; la position du mobile M sera déterminée par la distance $OM = x$; nous regarderons x comme positif quand le point M sera à droite du point O, et négatif quand le point M sera à gauche; on aura toujours :

$$\frac{dx}{dt} = v. \tag{2}$$

La vitesse sera positive quand le mouvement aura lieu dans le sens des x positifs; si la force F agit dans ce sens, elle augmentera la valeur algébrique de v, dv sera positif; si elle agit en sens contraire, dv sera négatif. Ainsi, dans les applications que nous ferons de l'équation (1), nous affecterons la force F du signe + quand elle agira dans le sens des x positifs, du signe — quand elle agira dans le sens des x négatifs. Si plusieurs forces agissaient sur le mobile, on appliquerait à chacune d'elles la règle ci-dessus relative au signe. En remplaçant dans (1) v par sa valeur (2), on a :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{F}. \tag{3}$$

Telle est l'équation du mouvement.

Dans le cas le plus général, F dépendra de la position du mobile, de sa vitesse et du temps; on aura :

$$\mathrm{F} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right).$$

L'équation (3) sera donc une équation différentielle du second ordre; son intégrale générale contiendra deux constantes arbitraires C et C′ :

$$x = \psi(t, \mathrm{C}, \mathrm{C}'). \tag{4}$$

La présence des deux constantes tient à ce que les problèmes qui ne diffèrent du problème proposé que par la position initiale x_0 et la vitesse initiale $v_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ du point matériel pour $t = 0$, conduisent à la même équation différentielle (3). On achèvera la solution en résolvant les deux équations :

$$x_0 = \psi\ (0, \mathrm{C}, \mathrm{C}'),$$
$$v_0 = \psi'\ (0, \mathrm{C}, \mathrm{C}'),$$

par rapport à C et à C′, et reportant ces valeurs dans (4).

10. On ne sait pas en général intégrer l'équation (3); nous considérerons un certain nombre de cas particuliers où cette équation peut être intégrée.

1° F *dépend seulement du temps*. On a :

$$F = f(t),$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t).$$

On en tire :

$$m\frac{dx}{dt} = mv_0 + \int_0^t f(t)\,dt,$$

$$mx = mx_0 + mv_0t + \int_0^t\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]dt.$$

2° F *dépend seulement de x* :

$$F = f(x),$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

On en conclut :

$$2dx\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2f(x)}{m}\,dx,$$

$$d\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2f(x)}{m}\,dx,$$

et en intégrant :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^x f(x)\,dx,$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^x f(x)\,dx}.$$

En résolvant par rapport à dt, et intégrant, il vient :

$$t = \int_{x_0}^x \pm\frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^x f(x)\,dx}}.$$

3° F *est une fonction de v* :

$$F = f(v),$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v),$$

d'où :

$$dt = \frac{mdv}{f(v)};$$

(5)
$$t = m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)},$$

$$dx = vdt = \frac{mvdv}{f(v)};$$

(6)
$$x = x_0 + m\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{f(v)}.$$

En éliminant v entre (5) et (6), on aura x en fonction de t.

Remarque. — Dans ces trois cas, on a déterminé les constantes d'intégration de manière que, pour $t = 0$, on ait : $x = x_0$, et $v = v_0$.

Application de ce qui précède. — Exemples de mouvement rectiligne.

11. Mouvement vertical des corps pesants dans le vide. — Prenons l'axe des x vertical et dirigé vers le bas; considérons d'abord le mouvement descendant. Nous aurons,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg,$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + gt,$$

$$x = v_0t + \tfrac{1}{2}gt^2,$$

si, pour $t = 0$ on a $x = 0$.

Considérons maintenant le mouvement ascendant. On a alors :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg,$$

$$v = v_0 - gt,$$

$$x = v_0t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Le corps monte jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle, c'est à dire jusqu'à ce qu'on ait : $t_1 = \frac{v_0}{g}$, alors :

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

A partir de cet instant il redescend, et il est facile de voir que, revenu au point de départ, il a précisément la vitesse avec laquelle il avait été lancé; seulement cette vitesse est dirigée en sens contraire.

12. Mouvement vertical d'un point matériel pesant dans un milieu résistant. — Les particules du milieu mises en mouvement, réagissent sur le corps pesant qui tombe, et déterminent une résistance à son mouvement. Cette résistance est une fonction de la vitesse v; nous la supposons égale à $mg\frac{v^n}{K^n}$, K étant un coefficient qui dépend de la forme du corps, mais qui reste constant pendant le mouvement. En dirigeant l'axe des x suivant la verticale, et supposant que le mouvement ait lieu de haut en bas, on aura :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - mg\frac{v^n}{K^n};$$

d'où :

$$gdt = \frac{dv}{1 - \frac{v^n}{K^n}}, \tag{1}$$

formule que l'on saura toujours intégrer, quand n sera entier. L'expérience montre que, pour des vitesses très faibles, on peut admettre $n = 1$; pour des vitesses moyennes inférieures à 200 mètres, $n = 2$, et enfin $n = 3$ pour des vitesses considérables, telles que celles des boulets de canon. Nous nous bornerons ici à considérer le cas de $n = 2$. On a alors :

$$(2) \qquad g\,dt = \frac{dv}{1-\frac{v^2}{K^2}} = \frac{K}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{v}{K}} + \frac{1}{1-\frac{v}{K}}\right) d\cdot\frac{v}{K},$$

d'où, en admettant que l'on ait $v = 0$, pour $t = 0$:

$$\frac{2gt}{K} = \log\frac{K+v}{K-v}.$$

$$(A) \qquad e^{\frac{2gt}{K}} = \frac{K+v}{K-v},$$

$$\frac{dx}{dt} = v = K\,\frac{e^{\frac{2gt}{K}}-1}{e^{\frac{2gt}{K}}+1},$$

$$dx = \frac{K^2}{g}\,\frac{e^{\frac{gt}{K}} - e^{\frac{-gt}{K}}}{e^{\frac{gt}{K}} + e^{\frac{-gt}{K}}}\,d\cdot\frac{gt}{K};$$

d'où, en intégrant :

$$x = \frac{K^2}{g}\log\left(e^{\frac{gt}{K}} + e^{\frac{-gt}{K}}\right) + C.$$

Si l'on a pris pour origine la position initiale du mobile, on devra avoir $x = 0$, pour $t = 0$; donc :

$$C = -\frac{K^2}{g}\log 2,$$

et l'on a les deux formules :

$$(3) \qquad x = \frac{K^2}{g}\log\frac{e^{\frac{gt}{K}} + e^{\frac{-gt}{K}}}{2},$$

$$(4) \qquad v = K\,\frac{e^{\frac{gt}{K}} - e^{\frac{-gt}{K}}}{e^{\frac{gt}{K}} + e^{\frac{-gt}{K}}}.$$

En éliminant t entre (3) et (4), on aura x en fonction de v. On peut encore obtenir cette relation de la manière suivante :

de (A) on tire :

$$e^{\frac{gt}{K}} = \frac{\sqrt{K+v}}{\sqrt{K-v}}; \quad e^{\frac{-gt}{K}} = \frac{\sqrt{K-v}}{\sqrt{K+v}};$$

et par conséquent :

$$\frac{e^{\frac{gt}{K}} + e^{\frac{-gt}{K}}}{2} = \frac{K}{\sqrt{K^2 - v^2}}.$$

Remplaçant dans (3) il vient :

$$(5) \qquad x = \frac{K^2}{g} \log \frac{K}{\sqrt{K^2 - v^2}} = \frac{K^2}{2g} \log \frac{K^2}{K^2 - v^2}.$$

Les formules (3), (4) et (5) renferment la solution complète du problème; on en déduit cette conséquence, que le temps augmentant sans cesse, le mouvement approche de plus en plus de l'uniformité, et qu'il est sensiblement uniforme quand la vitesse gt provenant de la pesanteur est devenue très grande par rapport à K. On peut écrire en effet (3) et (4) comme il suit :

$$x = \frac{K^2}{g} \log \left[\frac{e^{\frac{gt}{K}}}{2} \left(1 + e^{\frac{-2gt}{K}}\right) \right] = Kt - \frac{K^2}{g} \log 2 + \log\left(1 + e^{\frac{-2gt}{K}}\right),$$

$$v = K \frac{1 - e^{\frac{-2gt}{K}}}{1 + e^{\frac{-2gt}{K}}},$$

et, en négligeant alors l'exponentielle $e^{\frac{-2gt}{K}}$, qui est une très petite fraction, il vient :

$$x = Kt - \frac{K^2}{g} \log 2,$$

$$v = K;$$

ces équations représentent bien un mouvement uniforme, de vitesse K; il convient de remarquer que la force motrice $mg\left(1-\frac{v^2}{K^2}\right)$ devient nulle à la limite quand on fait $v = K$.

Remarquons que le temps au bout duquel le mouvement devient sensiblement uniforme, est d'autant plus grand que la valeur de K est plus grande; car, pour que l'on ait :

$$e^{\frac{-2gt}{K}} < \varepsilon,$$

ε étant une quantité positive très petite, donnée d'avance, il faut que l'on ait :

$$t > \frac{K}{2g}\log\frac{1}{\varepsilon},$$

expression qui croît avec K.

La résistance du fluide étant une force qui s'exerce à la surface du mobile, la force motrice qui en résulte est indépendante de la masse, et serait la même, soit que le mobile fût formé d'une matière très dense, soit qu'on enlevât la matière intérieure et qu'on la réduisît à une enveloppe très mince; la force motrice pourra être mise sous la forme $mg - HSv^2$, S désignant la surface et H une constante; la force accélératrice sera $g - \frac{HS}{m}v^2$, et, toutes choses égales d'ailleurs, elle sera d'autant plus grande que m sera plus grand; on aura : $K = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{HS}}$.

C'est pour cela que le mouvement final, dans un milieu résistant, est le plus rapide pour le corps pesant dont la densité est la plus grande, la forme et l'étendue de la surface restant les mêmes.

Quand la densité du milieu est très faible par rapport à celle du mobile, K est très grand, et ce n'est qu'après un temps très long que le mouvement peut approcher de l'uniformité; on a en séries convergentes :

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{K}}+e^{\frac{-gt}{K}}\right)=1+\frac{g^2t^2}{2K^2}+\frac{g^4t^4}{24K^4}+\dots,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{K}}-e^{\frac{-gt}{K}}\right)=\frac{gt}{K}+\frac{g^3t^3}{6K^3}+\dots,$$

$$\frac{e^{\frac{gt}{K}}-e^{\frac{-gt}{K}}}{e^{\frac{gt}{K}}+e^{\frac{-gt}{K}}}=\frac{gt}{K}+\frac{g^3t^3}{6K^3}-\frac{g^3t^3}{2K^3}+\dots=\frac{gt}{K}-\frac{1}{3}\frac{g^3t^3}{K^3}+\dots,$$

$$\log\left[\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{K}}+e^{\frac{-gt}{K}}\right)\right]=\frac{g^2t^2}{2K^2}+\frac{g^4t^4}{24K^4}-\frac{g^4t^4}{8K^4}+\dots.$$

$$=\frac{g^2t^2}{2K^2}-\frac{g^4t^4}{12K^4}+\dots,$$

et l'on en conclut :

$$x=\tfrac{1}{2}gt^2-\frac{g^3t^4}{12K^2}+\dots,$$

$$v=gt-\tfrac{1}{3}\frac{g^3t^3}{K^2}+\dots$$

Ces formules se réduisent, comme cela devait être, aux formules du mouvement uniformément accéléré, pour $K=\infty$.

13. *Le mobile est lancé de bas en haut dans le même milieu.*

Prenons encore pour axe des x la verticale, dirigée vers le haut. La force motrice est alors :

$$-mg-mg\frac{v^2}{K^2}.$$

Si la surface supérieure du mobile est identique à la surface inférieure, K sera la même que précédemment.

L'équation du mouvement sera :

$$\frac{dv}{dt}=-g-g\frac{v^2}{K^2}, \tag{6}$$

$$-g dt = \frac{dv}{1+\frac{v^2}{K^2}} = K \frac{\frac{dv}{K}}{1+\frac{v^2}{K^2}}.$$

Soit v_0 la vitesse initiale, on aura en intégrant, et déterminant la constante arbitraire de manière que $v = v_0$, pour $t = 0$:

$$\frac{-gt}{K} = \text{arc tang.}\, \frac{v}{K} - \text{arc tg}\, \frac{v_0}{K} = \text{arc tg}\, \frac{\frac{v}{K} - \frac{v_0}{K}}{1 + \frac{v_0 v}{K^2}},$$

$$\frac{K(v_0 - v)}{K^2 + v_0 v} = \frac{\sin \frac{gt}{K}}{\cos \frac{gt}{K}},$$

(7) $$v = K \frac{v_0 \cos \frac{gt}{K} - K \sin \frac{gt}{K}}{v_0 \sin \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}},$$

d'où :

$$dx = v dt = \frac{K^2}{g}\, d.\log\left(v_0 \sin \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}\right),$$

$$x = \frac{K^2}{g} \log\left(v_0 \sin \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}\right) + C.$$

On déterminera la constante en remarquant que pour $t = 0$ on a $x = 0$, ce qui donne :

$$C = -\frac{K^2}{g} \log K,$$

et par conséquent on a :

(8) $$x = \frac{K^2}{g} \log\left(\frac{v_0}{K} \sin \frac{gt}{K} + \cos \frac{gt}{K}\right).$$

On aura aussi, en partant de (6) :

$$\frac{vdv}{dx} = -g\left(1 + \frac{v^2}{K^2}\right),$$

$$\frac{-2gdx}{K^2} = \frac{d.\,v^2}{v^2 + K^2},$$

et, en intégrant :

$$\frac{-2gx}{K^2} = \log(v^2 + K^2) + C',$$

d'où, en déterminant la constante en remarquant que pour $x = 0$, $v = v_0$:

$$x = \frac{K^2}{2g}\log\frac{K^2 + v_0^2}{K^2 + v^2}. \tag{9}$$

Les formules (7), (8) et (9) résolvent complètement le problème. Appelons h la plus grande hauteur à laquelle le mobile parviendra, et qui répond à $v = 0$; soit θ_1 le temps qu'il emploiera pour y parvenir, nous aurons :

$$\operatorname{tg} g\frac{\theta_1}{K} = \frac{v_0}{K},$$

$$\theta_1 = \frac{K}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{K}, \tag{10}$$

$$h = \frac{K^2}{2g}\log\frac{K^2 + v_0^2}{K^2}. \tag{11}$$

Parvenu à cette hauteur le mobile retombera, et son mouvement sera représenté par les formules (3), (4) et (5). Cherchons sa vitesse v' lorsqu'il sera retombé de la hauteur h; (5) donnera :

$$h = \frac{K^2}{2g}\log\frac{K^2}{K^2 - v'^2}; \tag{12}$$

égalant cette valeur à la valeur (11), il viendra :

$$\frac{K^2}{K^2 - v'^2} = \frac{K^2 + v_0^2}{K^2},$$

d'où :

(13) $$v'^2 = \frac{K^2 v_0^2}{K^2 + v_0^2}.$$

On en conclut $v' < v_0$, en sorte que la vitesse du mobile, quand il sera revenu à son point de départ, se trouvera moindre que sa vitesse initiale. Désignons par θ' le temps qu'il met à retomber de la hauteur h, et pour acquérir par conséquent la vitesse v'. La formule (4) donnera :

$$e^{\frac{2g\theta'}{K}} = \frac{K + v'}{K - v'},$$

ou bien, en remplaçant v' par sa valeur (13) :

$$\theta' = \frac{K}{2g} \log \frac{\sqrt{K^2 + v_0^2} + v_0}{\sqrt{K^2 + v_0^2} - v_0} = \frac{K}{g} \log \frac{K}{\sqrt{K^2 + v_0^2} - v_0},$$

si θ désigne le temps total $\theta_1 + \theta'$ de l'allée et du retour du projectile. On en conclura :

$$\frac{g\theta}{K} = \text{arc tg}\,\frac{v_0}{K} + \log \frac{K}{\sqrt{K^2 + v_0^2} - v_0}.$$

14. *La loi de résistance est quelconque.* On a $R = m\psi(v)$.

Prenons encore pour axe des x la verticale et considérons d'abord le cas du mouvement ascendant. Si nous supposons la partie positive des axes dirigée en sens contraire de la pesanteur, nous aurons pour l'équation différentielle du mouvement :

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - m\psi(v),$$

$$\frac{dv}{dt} = -g - \psi(v),$$

$$dt = \frac{-dv}{g + \psi(v)},$$

$$t = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g + \psi(v)},$$

$$dx = v\,dt = \frac{-v\,dv}{g + \psi(v)},$$

$$x = -\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{g + \psi(v)}.$$

Le mobile monte jusqu'à ce que $v = 0$. Soient T le temps qu'il emploie à monter, h la hauteur à laquelle il s'élève, on aura :

(1) $$T = \int_{0}^{v_0} \frac{d\alpha}{g + \psi(\alpha)},$$

(2) $$h = \int_{0}^{v_0} \frac{\alpha\,d\alpha}{g + \psi(\alpha)}.$$

Pour le mouvement descendant, supposons les x positifs dirigés dans le sens de la pesanteur ; nous aurons :

$$\frac{dv}{dt} = g - \psi(v),$$

$$t = \int_{0}^{v} \frac{d\alpha}{g - \psi(\alpha)},$$

(3) $$x = \int_{0}^{v} \frac{\alpha\,d\alpha}{g - \psi(\alpha)}.$$

Soit t' le temps nécessaire pour que le mobile reprenne la vitesse v_0, on aura :

$$t' = \int_{0}^{v_0} \frac{d\alpha}{g - \psi(\alpha)}.$$

En rapprochant cette formule de (1), on voit que t' est plus grand que T.

Cherchons la vitesse du mobile, quand il repasse au point de départ A après être tombé d'une hauteur h, il faut dans (3) remplacer v par une certaine valeur v_1 et x par h, ce qui donne :

$$h = \int_0^{v_1} \frac{\alpha\, d\alpha}{g - \psi(\alpha)}.$$

En comparant cette formule à (2), on voit que l'on a $v_1 < v_0$. Ainsi le mobile revient au point de départ avec une vitesse moindre que la vitesse v_0 qui serait nécessaire pour faire monter le mobile à la hauteur h.

Problèmes sur le mouvement rectiligne, dans lesquels la force motrice est une fonction de la distance à une origine fixe.

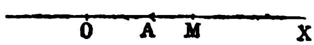
15. *Mouvement rectiligne d'un point matériel attiré proportionnellement à la distance par un centre fixe situé sur la droite trajectoire.*

Soit h l'attraction à l'unité de distance, à la distance x l'attraction sera hx. L'équation différentielle du mouvement sera :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -hx, \text{ ou en posant } \frac{h}{m} = n^2,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2x. \qquad (1)$$

Fig. 119 bis



Il est facile de voir que cette formule convient encore si le point M est situé à gauche du point O. L'intégrale générale de l'équation (1) est :

$$x = A\cos nt + B\sin nt,$$

et on en déduit :

$$v = \frac{dx}{dt} = -nA\sin nt + nB\cos nt.$$

Pour déterminer les constantes, supposons d'abord le mobile placé en M_0 à une distance x_0 de l'origine et sans vitesse initiale au temps $t = 0$. On aura :

$$x_0 = A, \quad B = 0,$$

donc :

$$\begin{cases} x = x_0 \sin nt, \\ v = -nx_0 \cos nt. \end{cases}$$

On voit d'abord que si t augmente de $\frac{2\pi}{n}$, x et v reprennent la même valeur, le mouvement est donc périodique.

Pour

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad v = 0,$$

t augmentant, x diminue, v est négatif et augmente en valeur absolue.

Pour

$$t = \frac{\pi}{2n}, \quad x = 0,$$

la valeur absolue de la vitesse est maxima.

Si t augmente de $\frac{\pi}{n}$, x et v changent de signes en conservant la même valeur absolue.

Soient x', v' et x'', v'' les valeurs qui correspondent aux temps :

$$t' = \frac{\pi}{2n} - \tau, \quad t'' = \frac{\pi}{2n} + \tau;$$

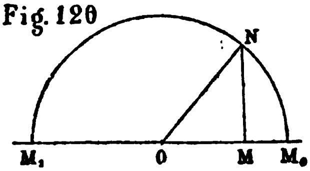
on aura :

$$x'' = -x'; \quad v'' = v'.$$

On a un mouvement oscillatoire dont la période $T = \frac{2\pi}{n}$.

16. Représentation géométrique. — Prenons $OM_1 = OM_0 = x_0$ et décrivons un cercle sur M_0M_1 comme diamètre ; imaginons un mobile partant de M_0 et parcourant la circonférence d'un mouvement uniforme dans le temps T. Soient N sa position sur le cercle au temps t, φ l'angle NOM_0,

Fig. 120



on aura :

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T}, \quad \varphi = nt,$$

$$OM = ON \cos \varphi = x_0 \cos nt = x.$$

Donc, la projection du second mobile coïncidera constamment avec le premier.

Le temps T est indépendant de x_0; quelle que soit la position initiale du mobile M_0, il met le même temps pour revenir au point O; ce temps est $\frac{T}{4}$. Le mouvement que l'on vient d'étudier serait celui d'un point pesant dans un canal rectiligne étroit, traversant toute la terre et passant par son centre, en supposant la terre sphérique et homogène, ou composée de couches concentriques homogènes.

Supposons maintenant que pour $t = 0$ on ait :

$$x = x_0, \quad v = v_0,$$

on aura pour déterminer les constantes les deux équations :

$$x_0 = A, \quad v_0 = nB;$$

d'où :

$$x = x_0 \cos nt + \frac{v_0}{n} \sin nt,$$

$$v = -nx_0 \sin nt + v_0 \cos nt.$$

On peut faire :

$$x_0 = a \cos H, \quad \frac{v_0}{n} = a \sin H, \quad a > 0,$$

et on aura :

$$x = a \cos (nt - H),$$

$$v = -na \sin (nt - H).$$

Le mouvement est encore oscillatoire, et la durée T de l'oscillation complète est encore égale à $\frac{2\pi}{n}$, et, par conséquent, indépendante de x_0 et de v_0.

17. ***Mouvement rectiligne d'un point repoussé proportionnellement à la distance par un centre fixe situé sur sa trajectoire.***

Soit x la distance du mobile à l'origine O, l'équation différentielle du mouvement sera :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = + n^2 x.$$

On en déduit :

$$x = Ae^{nt} + Be^{-nt},$$

$$\frac{dx}{dt} = n\left(Ae^{nt} - Be^{-nt}\right).$$

Soient x_0 et v_0 la distance initiale et la vitesse initiale du mobile. On aura :

Fig. 121

$$x_0 = A + B, \quad \frac{v_0}{n} = A - B,$$

et par conséquent :

$$2x = \left(x_0 + \frac{v_0}{n}\right)e^{nt} + \left(x_0 - \frac{v_0}{n}\right)e^{-nt},$$

$$2v = (nx_0 + v_0)\, e^{nt} - (nx_0 - v_0)\, e^{-nt}.$$

18. Discussion. — Si v_0 est positif, x_0 étant supposé l'être dans tous les cas, il est évident que le mobile s'éloignera à l'infini.

Supposons maintenant v_0 négatif, et $nx_0 + v_0 > 0$; v s'annulera pour une valeur t_1 de t satisfaisant à l'équation :

$$e^{2nt_1} = \frac{nx_0 - v_0}{nx_0 + v_0},$$

valeur admissible, car le second membre est plus grand que 1.

On aura alors :

$$2x = e^{-nt_1}\left[\frac{1}{n}(nx_0 - v_0) + \frac{1}{n}(nx_0 - v_0)\right],$$

$$x = \frac{e^{-nt_1}(nx_0 - v_0)}{n},$$

valeur positive; v changera ensuite de signe; ainsi le mobile va de M_0 en M_1, puis de M_1 en M_0 et de M_0 à l'infini vers la droite; il ne passe pas au point O.

Si, v_0 étant toujours < 0, on a $nx_0 + v_0 < 0$, v est toujours négatif, le mobile va de M_0 en O et de O à l'infini vers la gauche.

19. *Mouvement rectiligne d'un point matériel attiré par l'origine par une force proportionnelle à la puissance* $2n$ *de la distance.*

Nous aurons :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x^{2n},$$

d'où, en multipliant par $2dx$, et intégrant :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C - \frac{2\alpha}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Nous supposons que le point ait d'abord été placé en M_0 sans vitesse initiale; nous aurons pour déterminer C l'équation :

$$0 = C - \frac{2\alpha}{2n+1}x_0^{2n+1},$$

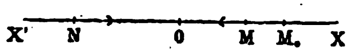
par suite :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2\alpha}{2n+1}(x_0^{2n+1} - x^{2n+1}). \tag{1}$$

Le mobile arrivera au point O et passera vers la gauche.

La force tirant alors dans le sens O X devra être considérée comme positive et l'on devra prendre l'équation :

Fig. 122



$$\frac{d^2x}{dt^2} = + \alpha x^{2n}.$$

On en conclut :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C' + \frac{2\alpha}{2n+1} x^{2n+1}. \tag{2}$$

Pour déterminer la constante, nous ferons $x = 0$, et nous aurons, en appelant v_0 la vitesse en O :

$$v_0^2 = C' ;$$

mais de (1) on tire :

$$v_0^2 = \frac{2\alpha}{2n+1} x_0^{2n+1},$$

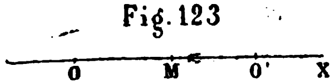
donc :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2\alpha}{2n+1} (x_0^{2n+1} + x^{2n+1}). \tag{3}$$

L'équation (1) convient quand le mobile est à droite du point O, l'équation (3) quand il est à gauche. Il est facile de voir à quoi tient cette particularité : quand le mobile est à droite, la force doit être considérée comme négative; à gauche au contraire, elle doit être considérée comme positive. Or l'expression αx^{2n} est positive dans les deux cas; elle ne prend donc pas d'elle-même le signe convenable et il faut le mettre dans chaque cas.

20. *Mouvement rectiligne d'un point matériel attiré par deux centres fixes situés sur la trajectoire en raison inverse du carré de la distance.* Je ne considèrerai que le mouvement du point entre les deux centres fixes; soient O et O' les deux

Fig. 123



centres fixes; on a, en désignant par m et m' les attractions de ces deux centres sur l'unité de masse à l'unité de distance, par a la distance OO' et par x la distance OM :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-m}{x^2} + \frac{m'}{(a-x)^2};$$

on en tire :

$$d \cdot \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{-2mdx}{x^2} + \frac{2m'dx}{(a-x)^2},$$

et en intégrant :

$$(2) \qquad \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2m}{x} + \frac{2m'}{a-x} + C = v^2.$$

Soient v_0 la vitesse initiale, x_0 la valeur correspondante de x; on aura, pour déterminer la constante C, l'équation :

$$(3) \qquad C = v_0^2 - \frac{2m}{x_0} - \frac{2m'}{a-x_0};$$

de (2) on déduit :

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2m}{x} + \frac{2m'}{a-x} + C}},$$

ou bien en posant :

$$(4) \qquad f(x) = \frac{2m}{x} + \frac{2m'}{a-x} + C,$$

$$(5) \qquad dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$$(6) \qquad t = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Remarquons que $f(x_0)$ étant égal à v^2_0 est positif.

On prendra le signe + si au début la vitesse v_0 a été dirigée dans le sens OO', le signe — dans le cas contraire.

21. Discussion. — Pour savoir si x peut prendre toutes les valeurs comprises entre O et O', il faut voir si dans ces limites $f(x)$ est toujours positif. On voit par l'expression (4) de $f(x)$ que cette fonction pour $x = \varepsilon$ et $x = a - \varepsilon$ est positive et très grande, ε désignant une quantité positive très petite; ayons recours à la dérivée :

$$\text{(7)} \qquad \tfrac{1}{2} f'(x) = \frac{-m}{x^2} + \frac{m'}{(a-x)^2},$$

entre $x = 0$ et $x = a$, cette dérivée s'annule pour la valeur $x = x_1$ définie par l'équation :

$$\frac{m}{x_1^2} = \frac{m'}{(a-x_1)^2}; \quad \frac{\sqrt{m}}{x_1} = \frac{\sqrt{m'}}{a-x_1};$$

d'où :

$$x_1 = a\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{m'}},$$

$$a - x_1 = a\frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{m}+\sqrt{m'}}.$$

Donc, entre $x = 0$ et $x = a$, $f(x)$ atteint seulement un minimum, et cela pour $x = x_1$; on trouve pour ce minimum :

$$\text{(9)} \qquad f(x_1) = \frac{2}{a}\left(\sqrt{m}+\sqrt{m'}\right)^2 + \mathrm{C}.$$

Si ce minimum est positif, $f(x)$ ne s'annule pas entre les points O et O'; le mouvement se continue dans le même sens; ainsi le point mobile ira tomber sur O', s'il a d'abord été lancé dans la direction OO'; dans le cas contraire, il ira tomber sur O. En remplaçant C par sa valeur (3), nous voyons que ce cas se présentera quand on aura :

$$\text{(10)} \qquad v_0^2 > \frac{2m}{x_0} + \frac{2m'}{a-x_0} - \frac{2}{a}\left(\sqrt{m}+\sqrt{m'}\right)^2.$$

Si $f(x_1) < 0$, $f(x)$ s'annulera entre zéro et a pour deux valeurs, l'une $x' < x_1$, l'autre $x'' > x_1$.

Si $x_0 < x'$, et si le mobile est lancé dans le sens OO′, il s'éloignera de O jusqu'à la distance x' ; alors x devra diminuer, et le mobile retombera en O.

Si $x_0 > x''$, et si le mobile est lancé dans la direction O′O, x décroîtra jusqu'à x'', après quoi il croîtra, et le mobile ira retomber en O′; ce cas se présentera si l'on a :

$$(11) \qquad v_0^2 < \frac{2m}{x_0} + \frac{2m'}{a - x_0} - \frac{2}{a}(\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2.$$

Considérons enfin le cas où $f(x_1) = 0$; alors l'équation $f(x) = 0$ a deux racines égales à x_1. La valeur de C déduite de (9) en remplaçant $f(x_1)$ par zéro est égale à :

$$C = -\frac{2}{a}(\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2.$$

On a donc :

$$\frac{1}{2} f(x) = \frac{m}{x} + \frac{m'}{a - x} - \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2}{a},$$

$$\frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{x(a - x)} \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2}{a} (x - x_1)^2,$$

$$t = \pm \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m'}} \int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{x(a - x)}\, dx}{x - x_1}.$$

Si $x_0 < x_1$, et si le sens de v_0 est celui de OO′, il faut prendre le signe +.

Si $x_0 > x_1$, et si le sens de v_0 est celui de O′O, il faut prendre le signe —.

On voit que, dans l'un ou l'autre cas, le mobile arrive à la distance x_1 du point O, mais au bout d'un temps infini, et il y arrive avec une vitesse nulle. Le point qui correspond à $x = x_1$ est le point d'égale attraction, comme on le voit par l'équation :

$$\frac{m}{x_1^2} = \frac{m'}{(a - x_1)^2}.$$

Le cas que nous venons de traiter se présentera quand on aura :

$$(12) \qquad v_0^2 = \frac{2m}{x_0} + \frac{2m'}{a - x_0} - \frac{2}{a}\left(\sqrt{m} + \sqrt{m'}\right)^2;$$

v_0 étant donné, l'équation précédente donnera toujours pour x_0 deux valeurs comprises entre zéro et a, car x variant de x_1 à zéro ou de x_1 à a, le second nombre augmente constamment de zéro à l'infini.

Appliquons ce qui précède au cas où O et O′ sont les centres de la terre et de la lune. Nous supposons les deux corps en repos, et nous allons chercher quelle devrait être la vitesse d'un corps lancé d'un point de la surface de la lune dans la direction de la terre, pour que ce corps vînt tomber sur la terre. On devra avoir l'inégalité (10). Soient r et r' les rayons de la terre et de la lune ; on a en nombres ronds :

$$a = 60\,r; \quad r' = \frac{3}{11}\,r; \quad m' = \frac{m}{81};$$

$$x_0 = a - r' = \frac{657}{11}\,r;$$

l'inégalité (12) devient :

$$v_0^2 > 2m\left[\frac{1}{x_0} + \frac{1}{81\,(a - x_0)} - \frac{1}{60\,r} \times \frac{100}{81}\right],$$

$$v_0^2 > 2\,\frac{m}{r}\left[\frac{11}{657} + \frac{11}{264} - \frac{5}{243}\right];$$

on en conclut :

$$v_0^2 > 0{,}0828\,\frac{m}{r}.$$

Or, l'attraction de la terre, à la surface, est $\frac{m}{r^2}$ sur l'unité de masse; on a donc :

$$\frac{m}{r^2} = g,$$

et par suite :

$$v_0^2 > 0{,}0828\, g r;$$

en remplaçant g et r par les valeurs approchées :

$$g = 9{,}81; \quad r = 6\,360\,000^{\mathrm{m}},$$

on trouve :

$$v_0 > 2270^{\mathrm{m}}.$$

La lune n'ayant pas d'atmosphère dont la résistance puisse diminuer la vitesse des corps partis de sa surface, il s'ensuit que si la terre et la lune étaient en repos, un corps lancé de la surface de la lune vers la terre avec une vitesse plus grande que 2270 mètres dépasserait le point d'égale attraction et viendrait tomber à la surface de la terre. Il convient peut-être de rappeler, ici, qu'à une certaine époque on a supposé que les aérolithes pouvaient être lancés par les volcans de la lune; il est presque inutile d'ajouter que cette opinion est aujourd'hui complètement abandonnée.

Remarquons que ce que nous venons de dire ne s'applique pas à la réalité; à cause du mouvement de la lune, il faut composer la vitesse initiale du projectile avec la vitesse du mouvement de translation de la lune autour de la terre. Le projectile décrit une courbe dans l'espace, et nos formules ne s'appliquent pas.

Le même calcul donnerait 11100 mètres pour la vitesse avec laquelle on devrait lancer un projectile de la surface de la terre, pour que ce projectile pût atteindre la lune.

CHAPITRE III

MOUVEMENT CURVILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

Considérations préliminaires.

22. Théorème I. — *Si des forces données se font équilibre au point de vue statique, elles se font équilibre au point de vue dynamique.*

C'est à dire que si elles se font équilibre sur un point matériel en repos, elles se feront équilibre sur un point matériel en mouvement.

Soit, en effet, M un point matériel en mouvement sous l'action d'un groupe de forces f; désignons par F un groupe de forces qui se font équilibre sur le point matériel en repos. Considérons un système de points matériels identiques au proposé, et animés de la même vitesse initiale, sollicités tous par les forces f, ces points prendront évidemment le même mouvement de translation. Faisons maintenant agir les forces F sur un seul de ces points; d'après le principe des mouvements relatifs, l'effet produit par ces forces sera le même que si le point était en repos, c'est à dire que ces forces produiront un mouvement nul. Le mouvement résultant des forces f et F sera donc le même que le mouvement résultant des forces f.

23. Théorème II. — *Quand on a composé au point de vue statique un groupe de forces* F *agissant sur un point matériel, et trouvé leur résultante* R, *on peut appliquer la* *même règle au point de vue dynamique, c'est à dire que, sur un point matériel en mouvement, on pourra remplacer les forces* F *par leur résultante* R, *déterminée en statique sans que le mouvement soit modifié.*

En effet, remarquons que les forces F et — R se font équilibre, tant au point de vue statique qu'au point de vue dynamique. Cela posé, considérons le mouvement d'un point matériel animé d'une certaine vitesse initiale, et sollicité par les forces f et R, et par les forces F et — R : les forces F et — R se faisant équilibre, le mouvement sera le même que si le point n'était soumis qu'aux forces f et R; de même les forces R et — R se faisant équilibre, le mouvement sera le même que si le point n'était soumis qu'aux forces f et F.

Ainsi, le système des forces f et R et le système des forces f et F produisent le même mouvement; donc on peut remplacer les forces F par R; ainsi R est bien la résultante des forces F, au point de vue dynamique.

Mouvement curviligne d'un point matériel.

24. Théorème préliminaire. — *Dans tout mouvement curviligne, l'accélération de la projection du mobile sur une droite quelconque est, à chaque instant, égale à la projection de la force qui sollicite le mobile, divisée par la masse de ce point.*

Soient F la force qui sollicite le mobile et v sa vitesse à un certain instant. Concevons que l'on décompose la vitesse v en deux autres dirigées, l'une v' parallèlement à l'axe XX' sur lequel on fait les projections, l'autre v'' dans le plan projetant P qui passe en m. Décomposons de même la force F en deux autres F' et F'', F' dirigé suivant l'axe XX', F'' situé dans le plan projetant P. Concevons un système de points matériels identiques au point matériel considéré, animés tous de la vitesse v' au temps t, et sollicités chacun par une force égale et parallèle à F′; tous ces points vont prendre un mouvement de translation rectiligne parallèle à XX′ et, en vertu du théorème démontré relativement au mouvement rectiligne, l'accélération de ce mouvement sera égale à chaque instant à $\frac{F'}{m}\cdot$ Le plan P, considéré comme faisant partie du système, se déplace parallèlement à lui-même. Imaginons maintenant que, dans le système, le point m soit animé de la vitesse v' au temps t et qu'il soit sollicité par la force F′ qui est toujours contenue dans le plan P; le mouvement relatif dans le système est le même que si le système était en repos; mais alors le mobile ayant sa vitesse initiale v' dans le plan P et étant sollicité par une force F′ située dans ce plan n'en sortira pas. Le mouvement relatif déplace donc seulement le mobile dans le plan P, et par conséquent n'a pas d'influence sur le mouvement de la projection; donc le mouvement de la projection est identique au mouvement de translation du système; l'accélération du mouvement de la projection est donc $\frac{F'}{m}$, c'est à dire égale à la projection de la force divisée par la masse du mobile. Cela a lieu, que les projections soient orthogonales ou obliques.

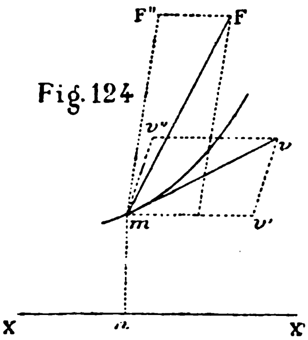


Fig. 124

25. Théorème fondamental. — *Dans un mouvement curviligne quelconque, l'accélération est à chaque instant égale en grandeur et en direction à la force qui sollicite le mobile, divisée par sa masse.*

Soient en effet a, b, c les angles que fait la force F avec trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et a', b', c' les angles que fait avec les mêmes axes l'accélération γ. Nous savons que l'accélération de la projection du mobile sur Ox est égale à la projection de γ sur Ox; mais, d'après le théorème précédent, elle est aussi égale à $\dfrac{F\cos a}{m}$; on a donc :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{F\cos a}{m} &= \gamma\cos a', \\ \frac{F\cos b}{m} &= \gamma\cos b', \\ \frac{F\cos c}{m} &= \gamma\cos c'. \end{aligned}\right.$$

On en tire :

$$\frac{\cos a}{\cos a'} = \frac{\cos b}{\cos b'} = \frac{\cos c}{\cos c'} = \frac{\frac{F}{m}}{\gamma} = \frac{\pm\sqrt{\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c}}{\sqrt{\cos^2 a' + \cos^2 b' + \cos^2 c'}} = \pm 1.$$

F et γ étant essentiellement positifs, il faut prendre le signe $+$; nous avons donc :

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos a' \\ \cos b &= \cos b' \\ \cos c &= \cos c' \end{aligned}\right\} \quad \frac{F}{m} = \gamma.$$

26. Remarque. — C'est là le théorème général de la dynamique : il exprime une relation entre la cause et l'effet; c'est à l'aide de ce théorème qu'on peut résoudre les deux questions principales qui se présentent en dynamique :

1° Un mouvement étant observé, trouver la cause qui le produit;

2° Étant donnés la force qui agit sur le mobile, et son état initial, c'est à dire sa position et sa vitesse initiales, trouver le mouvement.

Dans le premier cas, on remonte de l'effet à la cause.

Dans le deuxième, on redescend de la cause à l'effet.

Nous allons maintenant donner, en partant du théorème général, les équations du mouvement d'un point matériel.

27. Équations générales du mouvement d'un point matériel. — On peut toujours considérer le point matériel comme soumis à l'action d'une force unique, laquelle est la résultante des actions de toute espèce qui s'exercent sur lui. Si le point n'était pas absolument libre, c'est à dire s'il faisait partie d'un corps ou d'un système de corps liés entre eux, ou bien encore s'il se trouvait gêné dans son mouvement par des obstacles, il faudrait avoir soin, dans l'évaluation de la résultante ou force motrice, de tenir compte des forces qui proviennent des liaisons du système, ainsi que des réactions, des obstacles ou appuis. Nous verrons plus tard comment on peut le faire.

Nous rapporterons le mouvement du point matériel à trois axes fixes Ox, Oy, Oz; les coordonnées du point seront x, y, z; nous devrons décomposer la force motrice en trois autres X, Y, Z, respectivement parallèles aux axes, et nous aurons alors, en prenant t pour variable indépendante, les trois équations différentielles :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z, \end{aligned} \right.$$

pour déterminer x, y, z en fonctions du temps.

Les quantités X, Y, Z seront généralement des fonctions connues de x, y, z; elles pourront aussi contenir le temps t, et quelquefois même les vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Les équations (1) sont donc trois équations simultanées du second ordre; les intégrales de ces équations, c'est à dire les équations finies du mouvement, doivent contenir six constantes arbitraires. Le problème est cependant bien déterminé; il n'arrive jamais, comme en géométrie, qu'on puisse résoudre le problème de deux manières également admissibles. Un corps étant placé dans des conditions données, le mouvement qu'il prendra est unique et bien déterminé.

La présence des arbitraires tient à ce que nous n'avons pas tenu compte, en écrivant les équations différentielles, des conditions dans lesquelles le point matériel se trouve placé, au moment où nous l'abandonnons à l'action des forces X, Y, Z. L'analyse nous avertit ainsi que notre méthode nous donne du même coup la solution de tous les problèmes qui ne diffèrent du problème proposé que par la position initiale du point mobile, ainsi que par la grandeur et la direction de la vitesse qui anime ce point, à l'instant pris pour origine du temps.

L'intégration générale des équations (1) constitue donc seulement la première partie de la solution de la question proposée, et l'on doit achever cette solution de la manière suivante. Soient, en désignant par $C_1, \ldots, C_6$ les six constantes arbitraires :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= f(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \\ y &= \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \\ z &= \psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \end{aligned}\right.$$

les intégrales générales trouvées; nous en déduirons pour les composantes de la vitesse à une époque quelconque :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}\cdot f(t, C_1, \ldots) = f_1(t, C_1, \ldots), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\cdot \varphi(t, C_1, \ldots) = \varphi_1(t, C_1, \ldots), \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt}\cdot \psi(t, C_1, \ldots) = \psi_1(t, C_1, \ldots). \end{aligned}\right.$$

Cela posé, soit pour $t = 0$, x_0, y_0, z_0 les coordonnées du mobile, u_0, v_0, w_0 les composantes de la vitesse initiale;

nous aurons les six équations :

$$(4)\quad \begin{cases} x_0 = f(0, C_1, \ldots, C_6), \\ y_0 = \varphi(0, C_1, \ldots, C_6), \\ z_0 = \psi(0, C_1, \ldots, C_6), \end{cases} \qquad (5)\quad \begin{cases} u_0 = f_1(0, C_1, \ldots, C_6), \\ v_0 = \varphi_1(0, C_1, \ldots, C_6), \\ w_0 = \psi_1(0, C_1, \ldots, C_6). \end{cases}$$

Ces six équations serviront à déterminer les six arbitraires; ces six quantités devant être essentiellement distinctes, les équations (4) et (5) ne sauraient être ni incompatibles ni indéterminées; si l'un de ces cas se présentait, c'est qu'on n'aurait pas dans (2) les intégrales générales des équations (1).

Si les axes sont rectangulaires, en désignant par V_0, α_0, β_0, γ_0 la vitesse initiale et les angles que fait cette vitesse avec les axes, on devra remplacer dans (5) u_0, v_0, w_0 par :

$$u_0 = V_0 \cos \alpha_0; \qquad v_0 = V_0 \cos \beta_0; \qquad w_0 = V_0 \cos \gamma_0.$$

Après avoir traité cette seconde partie et déterminé les six arbitraires, on portera les valeurs obtenues dans les équations (2) qui feront connaître x, y, z à une époque quelconque t. En éliminant t entre les trois équations (2), on aura les équations de la courbe décrite par le mobile.

28. Mouvement dans un plan. — Lorsque la force qui sollicite le point matériel se trouve constamment contenue dans un plan, lequel renferme aussi la vitesse initiale, le mobile ne sort pas de ce plan; on aura seulement les deux équations différentielles :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

dont les intégrales générales contiendront quatre constantes arbitraires.

29. Réciproque du problème. — Quand on connaît la loi du mouvement d'un point, on connaît x, y, z en fonction du temps; on pourra calculer les dérivées secondes de ces coordonnées par rapport au temps, et en les multipliant par la masse du point on aura les composantes de la force qui produit le mouvement donné.

Cette seconde question est, comme on voit, beaucoup plus simple que la première.

30. Force tangentielle, force centripète. — On peut aussi procéder d'une autre manière en prenant pour axes la tangente à la trajectoire, la normale principale et l'axe du plan osculateur. Nous savons que la force motrice est dirigée dans le plan osculateur; soit α l'angle qu'elle fait avec la tangente à la trajectoire. Nous avons vu en *cinématique* que les projections de l'accélération sur la tangente et la normale principale ont pour valeur $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$; mais d'après notre théorème fondamental ces projections sont égales à :

$$\frac{F}{m}\cos\alpha \quad \text{et} \quad \frac{F}{m}\sin\alpha.$$

On a donc :

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} m\dfrac{dv}{dt} = F\cos\alpha = F_1, \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F\sin\alpha = F_2. \end{array}\right.$$

La force F_1 se nomme la force tangentielle et la force F_2 la force centripète.

31. Remarque. — On se fait une idée parfaitement claire du mouvement rectiligne produit par une force dont la direction ne diffère pas de la vitesse actuelle du mobile.

Au contraire, on voit beaucoup moins bien comment, dans le mouvement curviligne, la force influe à la fois sur les éléments géométriques de la trajectoire du mobile, et sur les variations de la vitesse de ce mobile. Les formules (5) mettent précisément en évidence comment la force produit à la fois, et d'une manière indépendante, la variation de vitesse du mobile et la courbure de la trajectoire. Ainsi :

1° Le changement de grandeur que la vitesse du mobile éprouve avec le temps, est dû uniquement à la force tangentielle; en sorte que, si cette force tangentielle était constamment nulle, c'est à dire si la force était constamment normale à la trajectoire, la vitesse ne varierait pas et le mouvement serait uniforme.

2° De même la courbure $\frac{1}{\rho}$ dépend uniquement de la force centripète; si cette force était constamment nulle, la courbure le serait aussi, et le mouvement serait rectiligne.

Euler, dans sa *Mécanique,* emploie exclusivement les équations du mouvement sous la forme (5); nous nous servirons des deux formes, chacune ayant ses avantages particuliers.

Nous allons appliquer les principes qui précèdent, à la détermination du mouvement des projectiles, d'abord dans le vide, puis dans un milieu résistant.

CHAPITRE IV

MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE ET DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

32. Mouvement des projectiles dans le vide. — Nous réduisons le projectile à un simple point matériel; nous prenons pour origine la position initiale du mobile, pour plan des xy le plan vertical qui contient la vitesse initiale, l'axe des x étant horizontal et l'axe des y vertical, et dirigé vers le haut; le mobile restera toujours dans le plan xOy.

Nous aurons, pour déterminer le mouvement du point matériel, les deux équations différentielles :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Si nous désignons par v_0 la vitesse initiale, et par α l'angle qu'elle fait avec l'horizon, nous devrons avoir pour $t = 0$,

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \alpha, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0 \sin \alpha.$$

Ces équations serviront à calculer les constantes d'intégration et l'on aura, pour déterminer le mouvement du point matériel, les équations suivantes :

$$(1) \qquad x = v_0 \cos \alpha . t, \qquad y = v_0 \sin \alpha . t - \tfrac{1}{2} g t^2;$$

on en tire successivement :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt, \tag{2}$$

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = v_0^2 - 2v_0 \sin \alpha\, gt + g^2t^2,$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gy. \tag{3}$$

On voit que la projection horizontale de la vitesse, $\frac{dx}{dt}$, est constante.

33. Courbe décrite. — Pour avoir la trajectoire du mobile il suffit d'éliminer t entre les équations (1).

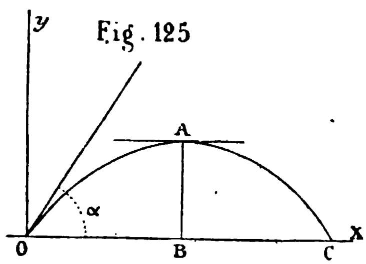
On trouve ainsi pour l'équation de la courbe :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \tag{4}$$

c'est l'équation d'une parabole dont l'axe est vertical, et dirigé vers le bas.

34. Amplitude du jet. — Cherchons le point C où la parabole vient couper l'horizontale OX ; OC est ce qu'on appelle l'amplitude du jet. Il suffit pour cela de faire $y = 0$ dans les équations (1), et d'éliminer ensuite t entre ces deux équations. On trouve ainsi :

Fig. 125



$$OC = X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

X a la même valeur pour :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \alpha' \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \alpha',$$

v_0 restant le même dans les deux cas.

v_0 restant constant et α variant seul, X est maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, alors $X = \frac{v_0^2}{g}$; c'est la plus grande amplitude que l'on puisse avoir, avec la vitesse donnée v_0.

35. Ordonnée du sommet. — On l'obtiendra en faisant dans (4) :

$$x = \tfrac{1}{2} X.$$

Cela donne pour les coordonnées X_1, Y_1 du sommet :

$$X_1 = \frac{X}{2}; \quad Y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}; \quad X_1 = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}. \tag{7}$$

v_0 étant constant, et α variable, Y_1 est un maximum pour $\alpha = 90°$, c'est à dire si la vitesse initiale est verticale; cette hauteur maxima est $\frac{v_0^2}{2g}$ ou la moitié de l'amplitude maxima.

36. Direction du tir. — Proposons-nous de trouver dans quelle direction il faut tirer avec une vitesse v_0 pour atteindre un point donné x', y'. L'équation (4) donne, en y remplaçant x et y par x' et y' :

$$y' = x' \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x'^2}{2 v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha);$$

on en tire :

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{2 v_0^2}{g x'} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2 v_0^2 y'}{g x'^2} + 1 = 0, \tag{8}$$

équation dans laquelle l'inconnue est $\operatorname{tg} \alpha$.

Pour que le problème soit possible, il faut que cette équation ait ses racines réelles, ce qui exige que l'on ait la condition :

$$\frac{v_0^4}{g^2 x'^2} - \frac{2 v_0^2 y'}{g x'^2} - 1 \geqq 0.$$

On en déduit :

$$y' \leqq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x'^2}{2 v_0^2}. \tag{A}$$

Considérons la courbe qui a pour équation :

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Cette courbe ABA′ est une parabole dont le sommet B est sur l'axe OY à une distance OB égale à $\frac{v_0^2}{2g}$, le foyer en O et le paramètre OA égal à $\frac{v_0^2}{g}$. La condition (A) signifie que le point M doit être intérieur à cette parabole. Quand cette condition est remplie, on a deux trajectoires passant par le point M.

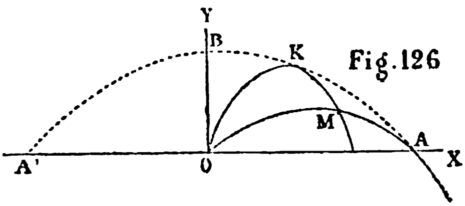


Fig. 126

Lorsque le point M est situé sur la parabole limite, par exemple en K, les deux racines de l'équation (8) sont égales; on n'a qu'une valeur de α donnée par la formule :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gx'}.$$

Il n'existe donc alors qu'une seule trajectoire passant par le point K.

La courbe ABA′ porte le nom de parabole de sûreté.

Elle est l'enveloppe des trajectoires quand on fait varier α; si nous voulons en effet trouver l'enveloppe des courbes représentées par l'équation :

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)\, x^2 - y = 0, \tag{9}$$

ou :

$$f(\operatorname{tg} \alpha) = 0,$$

lorsque α prend toutes les valeurs possibles, il faut joindre à cette équation la suivante :

$$f'(\operatorname{tg} \alpha) = 0,$$

et éliminer $\operatorname{tg} \alpha$ entre ces deux équations. Or le même procédé peut être employé pour trouver la condition pour que l'équation (9) ait ses deux racines égales.

37. Temps nécessaire pour atteindre un point donné. — Cherchons le temps t' nécessaire au projectile pour atteindre le point M dont les coordonnées sont x', y'. On peut écrire les équations (1) de la manière suivante :

$$x' = v_0 t' \cos\alpha,$$
$$y' + \tfrac{1}{2} g t'^2 = v_0 t' \sin\alpha.$$

On en déduit :

$$(y' + \tfrac{1}{2} g t'^2)^2 + x'^2 = v_0^2 t'^2, \tag{10}$$
$$g^2 t'^4 + 4t'^2 (gy' - v_0^2) + 4(x'^2 + y'^2) = 0,$$

d'où :

$$g^2 t'^2 = 2(v_0^2 - gy') \pm 2\sqrt{(v_0^2 - gy')^2 - g^2 r'^2},$$

en posant :

$$r'^2 = x'^2 + y'^2,$$

ou :

$$g^2 t'^2 = \left(\sqrt{v_0^2 - gy' + gr'} \pm \sqrt{v_0^2 - gy' + gr'}\right)^2,$$

on a donc enfin :

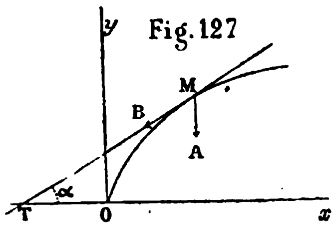
$$gt' = \sqrt{v_0^2 - gy' + gr'} \pm \sqrt{v_0^2 - gy' + gr'}.$$

Le signe + correspond à la plus grande valeur de α, le signe — à la plus petite; cela résulte de la relation :

$$t' = \frac{x'}{v_0 \cos\alpha},$$

qui montre qu'à la plus grande valeur de α répond la plus grande valeur de t'.

38. Du mouvement des projectiles dans un milieu résistant. — Nous supposerons le projectile sphérique et nous ferons abstraction de la rotation de la terre. Dans ces conditions le centre du projectile ne sortira pas du plan vertical qui contient la vitesse initiale; nous pourrons nous occuper seulement de ce centre. Soient m sa masse, mgR la résistance du milieu, OM la trajectoire, Ox, Oy deux axes rectangulaires dans le plan de cette trajectoire, Ox horizontal, Oy vertical dirigé vers le haut. Soient α l'angle que fait avec Ox la tangente MT, v la vitesse en M; les forces qui agissent sur le point M sont la pesanteur $MA = mg$, la résistance de l'air $MB = mgR$; on aura donc les équations suivantes, pour déterminer le mouvement :



$$(1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\,mgR\cos\alpha, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\,mg - mgR\sin\alpha, \end{cases}$$

auxquelles on peut joindre :

$$(2)\quad \frac{dx}{dt} = v\cos\alpha;\quad \frac{dy}{dt} = v\sin\alpha.$$

En tenant compte de (2), les équations (1) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{d.v\cos\alpha}{dt} = -\,gR\cos\alpha; \\ \dfrac{d.v\sin\alpha}{dt} = -\,g - gR\sin\alpha. \end{cases}$$

On peut remplacer ces deux dernières équations par les suivantes :

$$(3)\qquad \frac{d.v\cos\alpha}{dt} = -\,gR\cos\alpha,$$

$$\sin\alpha.\frac{d.v\cos\alpha}{dt} - \cos\alpha.\frac{d.v\sin\alpha}{dt} = g\cos\alpha;$$

la dernière se simplifie et devient :

$$\frac{vd\alpha}{dt} = -\,g\cos\alpha,$$

d'où :

$$(4)\qquad -\,gdt = \frac{vd\alpha}{\cos\alpha}.$$

Portons cette valeur de dt dans (3) et il viendra :

$$(5)\qquad \frac{d.v\cos\alpha}{d\alpha} = vR.$$

R est une fonction de v; (5) est une équation différentielle du premier ordre, d'où on tirera v en fonction de α; (4) donnera ensuite t, et (2) x et y en fonction de α. Il convient de faire un changement de variables : au lieu de α nous introduirons :

$$p = \operatorname{tg} \alpha;$$

au lieu de v nous prendrons :

$$u = v \cos \alpha.$$

On aura :

$$d\alpha = \frac{dp}{1+p^2}; \quad v = u\sqrt{1+p^2},$$
$$R = f(v) = f\left(u\sqrt{1+p^2}\right);$$

(5) va devenir :

$$\frac{du}{dp} = \frac{u}{\sqrt{1+p^2}} f\left(u\sqrt{1+p^2}\right); \tag{6}$$

(4) donnera ensuite :

$$-gdt = udp;$$

puis les équations (2) donneront :

$$-gdx = u^2dp; \quad -gdy = u^2pdp.$$

Désignons par p_0 la valeur initiale de p, lorsque le mobile est en O, au temps $t = 0$. Les formules servant à la résolution du problème seront représentées par le tableau suivant :

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = p, \\ &v = u\sqrt{1+p^2}, \\ &R = f(v) = f\left(u\sqrt{1+p^2}\right), \\ &\frac{du}{dp} = \frac{u}{\sqrt{1+p^2}} f\left(u\sqrt{1+p^2}\right), \\ &\left.\begin{aligned} -gt &= \int_{p_0}^{p} udp, \\ -gx &= \int_{p_0}^{p} u^2dp, \\ -gy &= \int_{p_0}^{p} u^2pdp, \end{aligned}\right\} \; p_0 = \operatorname{tg} \alpha_0. \end{aligned} \right.$$

On voit que si l'on peut intégrer l'équation (6) qui est une équation du premier ordre, et qu'on en tire u en fonction de p, le problème sera réduit aux quadratures.

39. La première chose à faire est de déterminer, par l'expérience, la résistance du milieu (nous supposerons que ce soit l'air), en fonction de la vitesse, c'est à dire la fonction $f(v)$. Newton avait proposé la formule $f(v) = Kv^2$; cette formule ne convient pas dans le cas des très grandes vitesses. En discutant les expériences faites à Metz en 1857 par la commission du tir, le général Didion est arrivé à trouver que dans le cas des projectiles sphériques et pour des vitesses comprises entre 300 mètres et 650 mètres on a :

$$R = Av^2 + Bv^3.$$

Depuis, on a montré qu'on obtient le même degré de précision en prenant simplement : $R = Bv^3$; on voit que la question n'est pas encore complètement résolue. L'équation (6) s'intègre rigoureusement, lorsque $R = Av^2$ ou $R = Bv^3$; elle s'intègre même rigoureusement pour :

$$R = a + bv^n. \tag{7}$$

Cette expression comprend comme cas particulier $R = Av^2$ ou $R = Bv^3$, mais non $R = Av^2 + Bv^3$; mais on conçoit que, pour des valeurs de v comprises entre certaines limites, on puisse déterminer les trois constantes a, b et n de manière que la différence entre $a + bv^n$ et $Av^2 + Bv^3$ soit petite et de l'ordre des erreurs d'observation. La solution que nous allons donner en prenant $R = a + bv^n$ suffira donc aux besoins de la pratique. Prenons la formule (7) ou bien :

$$R = a + bu^n (1 + p^2)^{\frac{n}{2}}.$$

l'équation (6) deviendra :

$$\frac{du}{dp} = \frac{au}{\sqrt{1 + p^2}} + bu^{n+1} (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{8}$$

C'est une des formes de l'équation de Jacques Bernouilli, on sait donc l'intégrer; nous l'écrirons de la manière suivante :

$$(9) \qquad \frac{d\frac{1}{u^n}}{dp} + \frac{na}{\sqrt{1+p^2}}\frac{1}{u^n} = -nb\,(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Cette équation est une équation linéaire; on peut l'écrire :

$$\frac{dw}{dp} + \mathrm{P}p = \mathrm{Q}, \quad \text{en posant :} \quad w = \frac{1}{u^n}.$$

$$\mathrm{P} = \frac{na}{\sqrt{1+p^2}}; \quad \mathrm{Q} = -nb\,(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

L'intégrale générale sera :

$$w = e^{-\int \mathrm{P}dp}\left\{\mathrm{C} + \int e^{\int \mathrm{P}dp}\,\mathrm{Q}dp\right\};$$

or, on a :

$$\int \mathrm{P}dp = na\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)^{na};$$

$$e^{-\int \mathrm{P}dp} = \left(p+\sqrt{1+p^2}\right)^{-na};$$

$$e^{\int \mathrm{P}dp} = \left(p+\sqrt{1+p^2}\right)^{na}.$$

On aura donc :

$$(10) \quad w = \frac{1}{u^n} = \left(p+\sqrt{1+p^2}\right)^{-na} \left\{\mathrm{C} - nb\int_{p_0}^{p}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)^{na}(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}}dp\right\}.$$

On déterminera la constante C en écrivant que pour $p = p_0$

$$u = u_0 = v_0 \cos\alpha_0,$$

alors l'expression de $\frac{1}{u^n}$ sera ramenée à une quadrature que l'on ne saura pas effectuer en général, et les formules (A) achèveront la solution par d'autres quadratures.

40. Cas où $a = 0$. — Nous allons terminer les calculs dans le cas où $a = 0$, et par suite :

$$R = bv^n;$$

la formule (10) devient alors :

$$\frac{1}{u^n} = C - nb \int_{p_0}^{p} (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}} dp.$$

Déterminons la constante, et faisons le tableau des formules; nous aurons :

$$(B) \left\{ \begin{array}{lll} & u_0 = v_0 \cos \alpha_0, & \\ (11) & \frac{1}{u^n} - \frac{1}{u_0^n} = -nb \int_{p_0}^{p} (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}} dp, & \\ (12) & -gt = \int_{p_0}^{p} udp; & -gdt = udp, \\ (13) & -gx = \int_{p_0}^{p} u^2 dp; & -gdx = u^2 dp, \\ (14) & -gy = \int_{p_0}^{p} u^2 pdp; & -gdy = u^2 pdp, \\ & p_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 & \frac{dy}{dx} = p. \end{array} \right.$$

Si n est un nombre entier, on peut effectuer la quadrature qui figure dans l'expression (11) de $\frac{1}{u^n}$, mais non celles qui figurent dans les expressions (12), (13) et (14). Dans ce cas et dans le cas général où n est quelconque, on donnera à p des valeurs numériques assez rapprochées, et on calculera chacune des intégrales définies correspondantes par les formules dites de quadrature; on aura ainsi pour chacune des valeurs numériques de p les valeurs numériques de t, x, y, v. On pourra construire la trajectoire par points.

Sans effectuer ces quadratures, on peut arriver à se faire une idée de la forme de la trajectoire.

41. Discussion. — On aura évidemment $n > 0$, sans quoi R serait infini pour $v = 0$; $u = v \cos \alpha$ est positif tant que α n'atteint pas $\pm \frac{\pi}{2}$, auquel cas p serait égal à $\pm \infty$. La formule :

$$-g dt = u dp$$

montre que $\frac{dp}{dt}$ est toujours négatif, ainsi p décroît sans cesse; la formule (8) devient, en tenant compte de $a = 0$:

$$\frac{du}{dp} = b u^{n+1} (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}} > 0,$$

donc u décroît sans cesse. Ainsi :

$$0 < u < u_0.$$

La formule :

$$-gt = \int_{p_0}^{p} u dp$$

montre que la limite p qui diminue sans cesse, doit tendre vers $-\infty$, car on en déduit :

$$gt < \int_{p}^{p_0} u_0 dp < u_0 (p_0 - p).$$

Si p ne tendait pas vers $-\infty$, t ne pourrait croître indéfiniment. Ainsi pour $t = \infty$, $p = -\infty$, p variera donc toujours dans le même sens de p_0 à 0 et de 0 à $-\infty$. Pour $p = 0$ on aura le point le plus élevé de la trajectoire. Soient x_1, y_1 les coordonnées de ce point, t_1 le temps correspondant, on aura :

$$g t_1 = \int_0^{p_0} u dp,$$

$$g x_1 = \int_0^{p_0} u^2 dp,$$

$$g y_1 = \int_0^{p_0} u^2 p dp,$$

où u doit être remplacé par sa valeur générale (11) sans y faire $p = 0$. La vitesse v_1 au sommet sera donnée par les équations :

$$\frac{1}{u_1^n} = \frac{1}{u_0^n} + nb \int^{p_0} (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}} dp; \quad u_1 = v_1.$$

Au delà de ce point, p devenant négatif, nous ferons $p = -q$; les formules :

$$d.\frac{1}{u^n} = -nb\,(1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}} dp,$$
$$-g dt = u dp,$$
$$-g dx = u^2 dp,$$
$$-g dy = u^2 p dp$$

deviendront :

$$d.\frac{1}{u^n} = nb\,(1 + q^2)^{\frac{n-1}{2}} dq,$$
$$g dt = u dq,$$
$$g dx = u^2 dq,$$
$$g dy = -u^2 q dq.$$

Intégrons et remarquons que, pour $q = 0$, $t = t_1$, $x = x_1$, $y = y_1$, $u = u_1$, nous aurons les formules suivantes dans lesquelles q devra varier de 0 à $+\infty$:

$$(C)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{U^n} = \frac{1}{u_1^n} + nb \int_0^q (1 + q^2)^{\frac{n-1}{2}} dq, \\ & gT = g\,(t - t_1) = \int_0^q U dq, \\ & gX = g(x - x_1) = \int_0^q U^2 dq, \qquad v = U\sqrt{1 + q^2}, \\ & gY = g\,(y - y_1) = \int_0^q U^2 q dq. \end{aligned} \right.$$

T désigne le temps écoulé à partir du sommet; X et Y désignent les coordonnées relativement à des axes qui se coupent en ce point; on a pour $t = \infty$, $q = \infty$, et la première des formules (C) donne $U = 0$; il est aisé de voir que qU tend vers une limite finie, car on peut écrire :

$$\frac{1}{(qU)^n} = \frac{1}{q^n u_1^n} + nb\,\frac{\int_0^q (1+q^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dq}{q^n}.$$

Pour $q = \infty$, l'expression :

$$\frac{\int_0^q (1+q^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dq}{q^n}.$$

se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$; prenons le rapport des dérivées :

$$\frac{(1+q^2)^{\frac{n-1}{2}}}{nq^{n-1}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{q^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

La vraie valeur est donc $\frac{1}{n}$; ainsi :

$$\lim \frac{1}{(qU)^n} = b; \quad \lim qU = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}.$$

La formule :

$$v = U\sqrt{1+q^2} = qU\sqrt{1+\frac{1}{q^2}}$$

donnera :

$$\lim v = \lim qU,$$

$$\lim v = \frac{1}{\sqrt[n]{b}};$$

c'est la valeur pour laquelle :

$$R = mgbv^n$$

prend la valeur mg. La vitesse tend donc à devenir constante. L'expression :

$$gX = \int_0^q U^2 dq = \int_0^q (qU)^2 \frac{dq}{q^2}$$

montre que X augmente sans cesse, il est facile de voir que X tend vers une valeur finie. Soit M le maximum de qU lorsque q varie de q' à $+\infty$, q' étant suffisamment grand, on a :

$$\int_{q'}^{\infty} U^2 dq < M \int_{q'}^{\infty} \frac{dq}{q^2} < \frac{M}{q'};$$

donc X tend vers une limite finie.

On a de même :

$$-gY = \int_0^q U^2 q\,dq = \int_0^q (Uq)^2 \frac{dq}{q} = \int_0^{q'} U^2 q\,dq + \int_{q'}^q (Uq)^2 \frac{dq}{q}.$$

Y est toujours négatif et décroît sans cesse; je dis que lorsque q tend vers l'infini, Y tend vers $-\infty$. On a en effet, en désignant par N le minimum de qU pour les valeurs de q comprises entre q' et $+\infty$:

$$\int_{q'}^{\infty} U^2 q\,dq > N \int_{q'}^{\infty} \frac{dq}{q},$$

quantité infinie.

Donc la courbe a une asymptote verticale CD et le mouvement du projectile tend à devenir rectiligne et uniforme, puisqu'il tend à devenir rectiligne et que

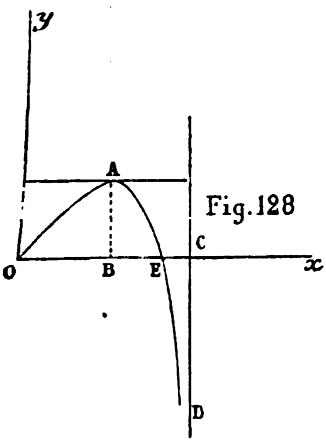


Fig. 128

$$\lim v = \text{const.}$$

On aura, pour déterminer la position de l'asymptote :

$$g \times BC = \int_0 U^2 dq.$$

Remarque. — Pour $n = 2$, la formule (11) donne :

$$\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_0^2} = -2b \int_p^p \sqrt{1+p^2}\, dp;$$

or :

$$\int \sqrt{1+p^2}\,dp = \tfrac{1}{2}\, p\sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2}\log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + \text{const.},$$

donc :

$$\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_0^2} = +\,b\left\{p_0\sqrt{1+p_0^2} - p\sqrt{1+p^2} + \log\frac{p_0 + \sqrt{1+p_0^2}}{p + \sqrt{1+p^2}}\right\}.$$

Pour $n = 3$:

$$\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u_0^3} = -\,3b\int_{p_0}^{p} (1+p^2)\,dp;$$

or :

$$\int (1+p^2)\,dp = p + \frac{p^3}{3} + \text{const.},$$

donc :

$$\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u_0^3} = b\,[3(p_0 - p) + p_0^3 - p^3].$$

Pour n entier, on aura une formule de réduction facile à trouver.

42. Mouvement des projectiles en supposant la résistance proportionnelle à la simple vitesse. — Méthode particulière. — Représentons la résistance R par $-\,m\mu v$; les projections de v sont : $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$; celles de R seront : $-\,m\mu\frac{dx}{dt}$, $-\,m\mu\frac{dy}{dt}$.

On a donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\mu\frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\,\mu\frac{dy}{dt} - g. \tag{2}$$

(1) peut s'écrire :

$$d.\log\frac{dx}{dt} = -\,\mu\,dt,$$

d'où, en désignant par C une constante arbitraire :

$$\frac{dx}{dt} = Ce^{-\mu t},$$

pour $t = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha,$$

α étant l'angle de la vitesse initiale avec l'axe des x; donc :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \, e^{-\mu t}, \tag{3}$$

d'où :

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\mu} (1 - e^{-\mu t}). \tag{4}$$

(2) peut s'écrire :

$$\frac{d^2\left(y + \frac{g}{\mu} t\right)}{dt^2} = -\mu \frac{d}{dt}\left(y + \frac{g}{\mu} t\right),$$

d'où, en opérant comme précédemment :

$$\frac{d}{dt}\left(y + \frac{g}{\mu} t\right) = C' e^{-\mu t};$$

pour $t = 0$ cette équation donnera :

$$v_0 \sin \alpha + \frac{g}{\mu} = C',$$

donc :

$$\frac{d\left(y + \frac{gt}{\mu}\right)}{dt} = \left(\frac{g}{\mu} + v_0 \sin \alpha\right) e^{-\mu t},$$

d'où :

$$y + \frac{gt}{\mu} = \left(\frac{g}{\mu^2} + \frac{v_0}{\mu} \sin \alpha\right)(1 - e^{-\mu t}).$$

On a ainsi :

$$y = -\frac{gt}{\mu} + \left(\frac{g}{\mu^2} + \frac{v_0 \sin \alpha}{\mu}\right)(1 - e^{-\mu t}), \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{\mu} + \left(\frac{g}{\mu} + v_0 \sin \alpha\right) e^{-\mu t}. \tag{6}$$

La solution du problème est donnée par les formules (3), (4), (5) et (6); la formule (3) montre que x croît sans cesse; pour $t = \infty$, x prendra une valeur x_1 que nous pourrons calculer à l'aide de la formule (4) :

$$x_1 = \frac{v_0 \cos \alpha}{\mu}, \tag{7}$$

pour $t = 0$, $\frac{dy}{dt}$ est positif; la formule (6) montre que $\frac{dy}{dt}$ s'annule pour $t = t'$ donnée par la formule :

$$e^{\mu t'} = 1 + \frac{\mu}{g} v_0 \sin \alpha,$$

valeur admissible puisque le second membre est plus grand que 1. Soient x' et y' les valeurs correspondantes de x et y, on trouve :

$$x' = \frac{\frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \frac{\mu}{g} v_0 \sin \alpha},$$

dans le vide :

$$x' = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha,$$

donc x' est plus petit que dans le vide. L'expression de y' est compliquée et n'a rien de particulièrement intéressant; pour $t > t'$, y diminue sans cesse et devient infini négatif pour $t = \infty$; on a donc une asymptote verticale; comme on a : $\lim \frac{dx}{dt} = 0$, $\lim \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{\mu}$, $\lim v = \frac{g}{\mu}$. On voit que le mouvement tend à devenir rectiligne et uniforme.

Équation de la trajectoire. — On peut éliminer t entre (4) et (5).

De (4) on déduit :

$$1 - e^{-\mu t} = \frac{\mu x}{v_0 \cos \alpha},$$

$$-\mu t = \log\left(1 - \frac{\mu x}{v_0 \cos \alpha}\right).$$

Remplaçant dans (5) t et $e^{-\mu t}$ par leurs valeurs, on aura l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{g}{\mu^2} \log\left(1 - \frac{\mu x}{v_0 \cos \alpha}\right) + x \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \frac{g}{\mu v_0 \sin \alpha}\right).$$

Amplitude du jet. — On trouve l'amplitude x' du jet par la formule :

$$\frac{g}{\mu^2} \log\left(1 - \frac{\mu x'}{v_0 \cos \alpha}\right) + x' \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \frac{g}{\mu v_0 \sin \alpha}\right) = 0.$$

Pour calculer x', posons :

$$1 - \frac{\mu x'}{v_0 \cos \alpha} = u, \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{v_0 \cos \alpha\, (1 - u)}{\mu},$$

on aura l'équation :

$$\log u + \frac{\mu^2}{g} \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \frac{g}{\mu v_0 \sin \alpha}\right) \frac{v_0 \cos \alpha}{\mu} (1 - u) = 0,$$

ou :

$$\log u + a\,(1 - u) = 0; \tag{7}$$

en faisant :

$$a = 1 + \frac{\mu v_0 \sin \alpha}{g},$$

on voit que $a > 1$.

Il est facile de voir que l'équation (7) a une racine comprise entre 0 et $\frac{1}{a}$. Posons :

$$f(u) = \log u + a\,(1 - u),$$

on a :

$$f'(u) = \frac{1}{u} - a.$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Pour} & u = 0 & & f(u) = -\infty, \\
& u < \dfrac{1}{a} & f'(u) > 0, & f(u) \text{ augmente,} \\
& u = \dfrac{1}{a} & f'(u) = 0, & f(u) \text{ maximum,} \\
& u > \dfrac{1}{a} & f'(u) < 0, & f(u) \text{ diminue,} \\
& u = 1 & & f(u) = 0.
\end{array}$$

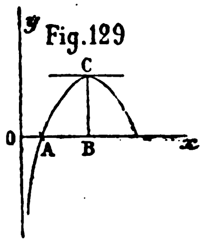


Fig.129

$f(u)$ est donc représenté entre 0 et 1 par la courbe ci-contre. La racine $u' = OA$ que nous cherchons est comprise entre 0 et $\frac{1}{a} = OB$.

On aura x' par la formule :

$$x' = \frac{v_0 \cos \alpha}{\mu} (1 - u').$$

CHAPITRE V

SUR LES INTÉGRALES D'UN PROBLÈME DE DYNAMIQUE.

43. Reprenons les équations différentielles du mouvement d'un point matériel libre :

$$(1)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Dans le cas le plus général X, Y, Z sont des fonctions données de $x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Nous avons vu que la solution la plus générale des équations (1) est :

$$(2)\qquad \begin{cases} x=F_1(t, C_1, \ldots, C_6), \\ y=F_2(t, C_1, \ldots, C_6), \\ z=F_3(t, C_1, \ldots, C_6). \end{cases}$$

On en déduit, en désignant les dérivées des fonctions F_1, F_2, F_3 par rapport au temps par Φ_1, Φ_2, Φ_3 :

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt}=\Phi_1(t, C_1, \ldots, C_6), \\ \frac{dy}{dt}=\Phi_2(t, C_1, \ldots, C_6), \\ \frac{dz}{dt}=\Phi_3(t, C_1, \ldots, C_6). \end{cases}$$

Considérons les équations (2) et (3). Ce sont six équations dans lesquelles on peut considérer $C_1, \ldots, C_6$ comme des inconnues; il doit être possible, sauf les difficultés de calcul, de résoudre les équations par rapport aux inconnues; car supposons qu'ayant tiré, par exemple, les valeurs de $C_1, \ldots, C_5$ de cinq de ces équations, et portant cette valeur dans la sixième, C_6 vienne à disparaître, on obtiendrait une équation telle que :

$$F\left[x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right] = 0. \tag{4}$$

Cette équation (4) devrait avoir lieu à une époque quelconque, et en particulier à l'époque t_0; on en conclurait donc :

$$F\left[x_0, y_0, z_0, t_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz}{dt}\right)_0\right] = 0. \tag{5}$$

Ainsi, les coordonnées initiales et la vitesse initiale ne pourraient pas être quelconques; les équations (2) ne donneraient donc pas la solution la plus générale, puisqu'elles supposeraient une certaine équation de condition entre les données initiales. On devra donc pouvoir déduire des équations (2) et (3) le système suivant de six équations :

$$\left\{\begin{aligned} C_1 &= \Psi_1\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ C_2 &= \Psi_2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_6 &= \Psi_6(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ces équations sont ce qu'on appelle les intégrales du mouvement.

Lorsqu'on connaît un système de six intégrales distinctes, on est sûr que toute autre intégrale rentrera dans celles-ci. Ce qui veut dire que si une fonction :

$$\theta\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \tag{7}$$

reste constante en vertu des équations du mouvement, on peut la mettre sous la forme :

$$\theta = \Theta(C_1, C_2, \ldots, C_6), \tag{8}$$

$C_1, \ldots, C_6$ ayant les valeurs déduites des équations (6).

On peut en effet remplacer dans (7) : $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ par leurs expressions en fonction de $t, C_1, \ldots, C_6$, moyennant quoi il viendra :

$$\theta = \chi(t, C_1, \ldots, C_6). \tag{9}$$

Or, pendant le mouvement $C_1, \ldots, C_6$ restent constants et θ aussi ; donc t doit disparaître de l'équation (9) qui se réduit bien à l'équation (8).

On peut donc envisager la solution d'un problème de dynamique à ce nouveau point de vue :

Trouver six fonctions distinctes $\psi_1, \ldots, \psi_6$ du temps t et de $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dy}, \frac{dz}{dt}$ qui restent constantes pendant toute la durée du mouvement. Poisson a fait connaître un théorème remarquable dont Jacobi a signalé l'importance, qui permet de trouver une troisième intégrale, quand on en connaît déjà deux. Avec cette troisième et l'une des premières, on trouverait la quatrième, etc. Il suffirait donc, en admettant la portée donnée au théorème de Poisson par Jacobi, de connaître deux intégrales d'un problème de dynamique, pour en déduire toutes les autres et par suite pour résoudre le problème. Malheureusement, il arrive le plus souvent que les intégrales obtenues par ce procédé ne sont pas distinctes ; elles sont presque toujours des combinaisons des deux premières. On peut consulter à ce sujet les travaux remarquables de Jacobi et de MM. Bertrand et Bour. Quoi qu'il en soit, on peut en combinant convenablement les équations (1) trouver, dans certains cas, un certain nombre d'intégrales, on arrive ainsi à des théorèmes dont on fait le plus grand usage. Nous allons faire connaître l'un deux.

44. Théorème des forces vives. — Intégrale des forces vives. — Reprenons les équations différentielles du mouvement d'un point matériel libre :

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

On en déduit :

$$(2) \quad m\left[2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right] = 2\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right).$$

Or, on a :

$$(3) \qquad v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2};$$

d'où l'on déduit :

$$(4) \qquad \frac{d.v^2}{dt} = 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2},$$

ce qui permet d'écrire comme il suit l'équation (2) :

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2}\frac{d.mv^2}{dt} = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}.$$

En intégrant, et désignant par v_0 la vitesse initiale au temps $t = t_0$ on aura :

$$(6) \qquad \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \int_{t_0}^{t}\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

La quantité mv^2 ou le produit de la masse par le carré de la vitesse se nomme la *force vive* du point matériel, et l'équation (6) est ce qu'on nomme l'équation des *forces vives*.

L'intégrale qui figure dans le second membre a un sens bien défini : en effet, lorsque le mouvement est connu, x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et par suite X, Y, Z sont des fonctions déterminées du temps ; l'intégrale peut être calculée, et l'on pourra ainsi vérifier l'équation des forces vives ; mais on ne voit pas actuellement l'utilité de cette équation pour obtenir les lois du mouvement. Faisons une hypothèse sur les composantes X, Y, Z : supposons ces quantités fonctions de x, y, z seulement, admettons en outre que X, Y, Z soient les dérivées partielles d'une même fonction F (x, y, z), en sorte que l'on ait :

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}; \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}; \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}.$$

On aura alors :

$$X = \frac{dF(x, y, z)}{dx}; \quad Y = \frac{dF(x, y, z)}{dy}; \quad Z = \frac{dF(x, y, z)}{dz};$$

on dit dans ce cas qu'il existe une fonction des forces, et cette fonction est F(x, y, z). On aura :

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dF(x, y, z)}{dt}.$$

On aura donc :

$$\int\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt = \int\frac{dF(x, y, z)}{dt}\,dt = F(x, y, z) + C.$$

Soient donc x_0, y_0, z_0 les valeurs de x, y, z pour $t = t_0$, l'équation (6) deviendra dans le cas actuel :

$$(7) \qquad \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0).$$

On voit qu'on a pu obtenir la valeur de l'intégrale qui figurait dans (6) sans connaître d'avance les expressions de x, y, z en fonction du temps.

Si l'on remarque que, dans cette équation (7), $\frac{1}{2}mv_0^2$

$-$ F (x_0, y_0, z_0) est une constante arbitraire, que v^2 peut être remplacé par $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$, on voit que cette équation (7) est une intégrale du mouvement, c'est l'intégrale des forces vives; elle n'existe pas en général, mais seulement sous les conditions spécifiées plus haut pour X, Y, Z. On peut dire encore que :

Dans le cas où $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ *est une différentielle exacte, la différentielle d'une certaine fonction de* x, y, z *considérés comme variables indépendantes, si un point matériel est soumis à l'action d'une force dont les composantes parallèles aux axes soient* X, Y, Z, *l'accroissement du carré de sa vitesse, en passant d'un point à un autre, pourra s'exprimer au moyen des coordonnées de ces deux points, quelles que soient la direction et la grandeur de sa vitesse au premier point, quelque temps qu'il mette pour parvenir au second, et quelque ligne qu'il parcoure entre les deux.*

On peut dire plus généralement, d'après l'équation (7), que si l'on considère les surfaces qui ont pour équations :

$$F(x, y, z) = C; \quad F(x, y, z) = C',$$

si le mobile part d'un point quelconque de la surface C′ avec une vitesse v_0 dans une direction arbitraire, lorsqu'il arrivera en un point de la surface C, sa vitesse v peut être déterminée par ces seules données, indépendamment du temps employé et de la ligne décrite. Le mobile peut avoir traversé la surface C un nombre quelconque de fois. Les surfaces que nous venons de considérer ont reçu le nom de *surfaces de niveau.*

45. Propriétés des surfaces de niveau. — Lorsque dans l'équation

$$F(x, y, z) - C = 0, \tag{8}$$

on fait varier C d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient l'ensemble des surfaces de niveau.

1° *Par chaque point de l'espace, on peut faire passer une de ces surfaces et une seule.* Soit le point donné x_1, y_1, z_1, la surface cherchée aura pour équation :

$$F(x, y, z) - F(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la fonction $F(x, y, z)$ ne puisse pas se réduire à $\frac{0}{0}$ pour des valeurs réelles et finies de x, y, z. Considérons, par exemple, le mouvement défini par les équations différentielles :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{4K^2xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-4K^2x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

on a ici :

$$F = K^2\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Les surfaces de niveau ont pour équation :

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = C,$$

d'où :

$$y = x\sqrt{\frac{1-C}{1+C}}.$$

Ces surfaces sont des plans passant par Oz; on voit que par un point quelconque de Oz passent une infinité de surfaces de niveau; mais on voit aussi que pour ce point la fonction F se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Écartons donc ces cas où la fonction des forces n'est pas bien déterminée, ou se réduit à $\frac{0}{0}$ pour des valeurs réelles et finies de x, y, z et nous aurons, d'après ce qui précède, le théorème suivant :

2° *Quelle que soit la trajectoire suivie par un point*

matériel, sa vitesse au passage d'une surface de niveau particulière est connue dès que l'on donne la vitesse qu'il possède en un point quelconque de l'espace.

3° *Les surfaces de niveau sont perpendiculaires à la force qui solliciterait le mobile en un quelconque de leurs points.*

En sorte que si elles étaient résistantes, ce mobile placé en un point quelconque de l'une de ces surfaces sans vitesse initiale y resterait en équilibre.

En effet, les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface (8) au point x, y, z sont proportionnels à $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ ou à X, Y, Z; la force est donc dirigée suivant la normale.

4° *Sens et grandeur de la force.* Remarquons que si l'on a une surface dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $f(x,y,z)=0$, les deux parties de la normale en M, MM_1 et MM_2 font avec les axes des angles déterminés par les formules suivantes :

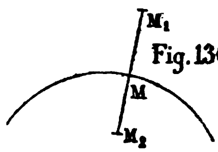


Fig. 130

$$(1) \qquad \cos\alpha_1 = \frac{+\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{+\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{+\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}};$$

$$(2) \qquad \cos\alpha_2 = \frac{-\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos \beta_2 = \frac{-\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{-\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

Si M_1 et M_2 désignent des points infiniment voisins de M, on aura, comme il est aisé de le voir par la série de Taylor :

$$(3) \qquad f(x_1, y_1, z_1) = + \mathrm{MM}_1 \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2},$$

$$(4) \qquad f(x_2, y_2, z_2) = - \mathrm{MM}_2 \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}.$$

Ainsi, pour les points infiniment voisins de M situés sur la moitié de la normale déterminée par (1), on a la formule (3) et $f(x_1, y_1, z_1)$ est positif : c'est ce qu'on nomme la normale extérieure.

Pour les points infiniment voisins situés sur les points de la moitié de la normale déterminée par (2), on a la formule (4) et $f(x_2, y_2, z_2)$ négatif.

Appliquons ces remarques aux surfaces de niveau

$$F(x, y, z) - C = 0.$$

Les composantes de la force qui sollicitent le mobile au point x, y, z sont :

$$X = + \frac{dF}{dx}, \quad Y = + \frac{dF}{dy}, \quad Z = + \frac{dF}{dz},$$

et l'on a pour les cosinus des angles que la direction de la force fait avec les axes les valeurs :

$$\cos\alpha = \frac{+\dfrac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{+\dfrac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{+\dfrac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{dF}{dz}\right)^2}}.$$

Donc la force est située du côté de la surface de niveau où

$$F(x, y, z) - C$$

est positif.

On aura en outre :

$$F(x_1, y_1, z_1) - C = + MM_1 \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$$
$$= + MM_1 \times P,$$

en désignant par P la grandeur de la force. Soit C_1 le paramètre de la surface de niveau qui passe en M_1, on aura :

$$C_1 = F(x_1, y_1, z_1),$$

et par conséquent :

$$C_1 - C = + MM_1 \times P.$$

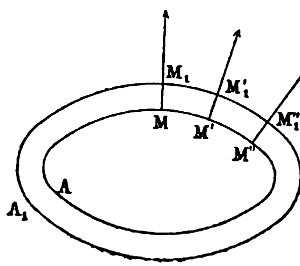


Fig. 131

Si donc on considère les deux surfaces de niveau infiniment voisines A et A_1 et qu'aux divers points M, M', M'' de la surface A on mène à cette surface les normales MM_1, $M'M'_1$, $M''M''_1$, ... et qu'on désigne par P, P', P''... les intensités de la force, lorsque le mobile est supposé placé en M, M', M''... en remarquant que C et C_1 restent les mêmes le long des surfaces A et A_1, on aura :

$$P = \frac{C_1 - C}{MM_1}; \quad P' = \frac{C_1 - C}{M'M'_1}; \quad P'' = \frac{C_1 - C}{M''M''_1}\ldots,$$

ou en général :

$$P = \frac{K}{MM_1};$$

ce qui offre une représentation simple des valeurs de l'intensité de la force qui sollicite le mobile, aux différents points d'une surface de niveau. Dans le cas particulier où la force P serait constante pour tous les points de la surface A, on aurait :

$$MM_1 = M'M'_1 = M''M''_1,$$

et les surfaces A et A_1 seraient parallèles.

Remarque. — De l'équation :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0),$$

on conclut que l'on doit avoir :

$$F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0) + m\frac{v_0^2}{2} > 0.$$

Si donc on considère la surface dont l'équation est :

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0 z_0) - \frac{mv_0^2}{2},$$

cette surface séparera l'espace en deux régions ; le mobile ne pourra jamais pénétrer dans l'une de ces régions ; s'il atteint la surface limite, ce sera avec une vitesse nulle. Cette remarque a été mise à profit par M. Hill, pour trouver une limite supérieure de la distance de la lune à la terre.

46. Extension de l'intégrale des forces vives. — Considérons un point matériel astreint à se mouvoir sur une courbe fixe ou sur une surface fixe, la courbe et la surface étant supposées parfaitement polies; soient encore X, Y, Z les composantes de la force motrice; on pourra considérer le point comme entièrement libre en introduisant la réaction de la courbe ou de la surface, réaction qui sera normale à la courbe ou à la surface, d'après notre hypothèse, et par suite normale à la trajectoire; on aura donc, en désignant par X_1, Y_1, Z_1 les composantes de cette réaction inconnue :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1.$$

On en déduit, en combinant ces équations comme précédemment :

$$\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right) + \left(X_1\frac{dx}{dt} + Y_1\frac{dy}{dt} + Z_1\frac{dz}{dt}\right).$$

Or, la réaction étant normale à la trajectoire, on a :

$$\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}\frac{dx}{ds} + \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}\frac{dy}{ds} + \frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}\frac{dz}{ds} = 0;$$

d'où :

$$X_1\frac{dx}{dt} + Y_1\frac{dy}{dt} + Z_1\frac{dz}{dt} = 0,$$

et par suite :

$$\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}.$$

C'est la même équation (5) que si le point était entièrement libre.

Si la fonction des forces existe, on en déduira, comme précédemment :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0).$$

L'intégrale des forces vives a lieu comme si le point était libre.

Exemples de cas où la fonction des forces existe.

1° *La seule force extérieure est la pesanteur.*

Prenons l'axe des z vertical et dirigé vers le bas; nous aurons :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg,$$
$$Xdx + Ydy + Zdz = d.mgz,$$

il existe donc une fonction des forces, et cette fonction est :

$$F(x, y, z) = mgz,$$

$$v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0). \tag{12}$$

Les surfaces de niveau sont données par l'équation :

$$z = C.$$

Ce sont des plans horizontaux.

L'équation (12) s'applique, d'après ce qui a été dit, au mouvement d'un point pesant, soit entièrement libre, soit assujéti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface.

2° *Le point matériel est soumis à l'action d'une force dirigée constamment vers un centre fixe, et dont l'intensité est fonction de la distance du mobile à ce centre fixe.*

Soient A le point fixe, a, b, c ses coordonnées, x, y, z les coordonnées du mobile M dans une position quelconque, r la distance MA; M est soumis à la force $MB = f(r)$; or, les cosinus des angles que MA fait avec les axes sont :

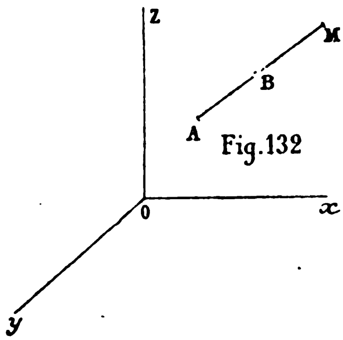


Fig. 132

$$\frac{a-x}{r}, \quad \frac{b-y}{r}, \quad \frac{c-z}{r}.$$

On a donc :

$$X = f(r)\frac{(a-x)}{r}; \quad Y = f(r)\frac{(b-y)}{r}; \quad Z = f(r)\frac{(c-z)}{r},$$

d'où :

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{f(r)}{r}[(a-x)\,dx + (b-y)\,dy + (c-z)\,dz].$$

Or, on a l'équation :

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = r^2,$$

d'où :

$$(a-x)\,dx + (b-y)\,dy + (c-z)\,dz = -\,r\,dr.$$

La fonction des forces existe et on a :

$$F(x, y, z) = -\int f(r)\,dr,$$

$$m\frac{(v^2 - v_0^2)}{2} = -\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr.$$

Les surfaces de niveau sont données par l'équation :

$$\int f(r)\,dr = \text{const},$$

ou bien :

$$r = C.$$

Ce sont des sphères ayant pour centre commun le point A.

La même chose a lieu lorsque le point M est soumis à d'autres forces dirigées vers d'autres centres fixes, les intensités de ces forces étant fonctions seulement des distances r, r', r''... du mobile à ces divers centres. On aura :

$$m\frac{(v^2-v_0^2)}{2}=-\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr-\int_{r'_0}^{r'}\varphi(r)\,dr\ldots$$

Les surfaces de niveau auront pour équation :

$$\int f(r)\,dr+\int\varphi(r)\,dr+\ldots=\mathrm{C}.$$

Si les forces, au lieu d'être attractives, étaient répulsives, il suffirait de changer les signes des fonctions $f(r)$, $\varphi(r)$...

3° *La force est dirigée perpendiculairement à un plan fixe et dépend seulement de la distance z du mobile à ce plan.*

On a :

$$\mathrm{X}=0,\quad \mathrm{Y}=0,\quad \mathrm{Z}=f(z),$$

$$\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz=d\int f(z)\,dz,$$

$$\frac{mv^2-mv_0^2}{2}=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

Les surfaces de niveau sont données par l'équation :

$$\int f(z)\,dz=\mathrm{C}.$$

Ce sont des plans parallèles au plan fixe.

4° *Le mobile est soumis à une force perpendiculaire à un axe fixe, et dont l'intensité est fonction seulement de la distance du mobile à cet axe.*

Prenons l'axe fixe pour axe des z; soit *(fig. 133)* MP $=\rho$, la force MA $=f(\rho)$; on a :

$$\mathrm{X}=-f(\rho)\frac{x}{\rho};\quad \mathrm{Y}=-f(\rho)\frac{y}{\rho};\quad \mathrm{Z}=0,$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = -\frac{f(\rho)}{\rho}(xdx + ydy).$$

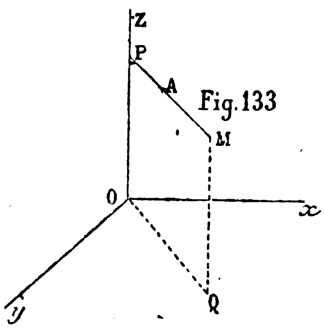


Fig. 133

Or :

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

d'où :

$$xdx + ydy = \rho d\rho;$$

donc :

$$Xdx + Ydy + Zdz = -f(\rho)\,d\rho$$
$$= d\left[-\int f(\rho)\,d\rho\right],$$

$$m\frac{v^2 - v_0^2}{2} = -\int_{\rho_0}^{\rho} f(\rho)\,d\rho.$$

Les surfaces de niveau seront données par l'équation :

$$\int f(\rho)\,d\rho = \text{const.},$$

ou bien par :

$$\rho = C.$$

Ce sont des cylindres de révolution autour de l'axe fixe.

5° *Les composantes de la force parallèles aux axes ne dépendent chacune que de la coordonnée correspondante du point :*

$$X = f(x), \quad Y = \varphi(y), \quad Z = \psi(z).$$

On a :

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\left\{\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy + \int \psi(z)\,dz\right\},$$

$$m\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \varphi(y)\,dy + \int_{z_0}^{z} \psi(z)\,dz.$$

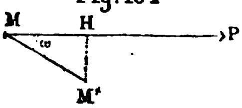
Les surfaces de niveau auront pour équation générale :

$$\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy + \int \psi(z)\,dz = C.$$

Du Travail.

47. Soit M un point matériel décrivant une certaine trajectoire et sollicité par plusieurs forces motrices dont la résultante P a une intensité et une direction connues. En vertu de la vitesse initiale et de la force motrice P, le point M se déplace, et au bout du temps Δt il vient en M′; projetons le point M′ en H sur la direction de la force P; nous aurons une projection infiniment petite MH, qui sera le déplacement élémentaire du point estimé suivant la direction de la force. Cela posé, on appelle ***travail élémentaire*** de la force P le produit $P \times MH$. Ce produit doit être pris avec le signe + si la projection du déplacement a la même direction que la force, c'est à dire si l'angle M′MH est aigu; avec le signe — si elle a une direction contraire ou si l'angle M′MH est obtus. Soient ω l'angle M′MP, ds l'arc MM′ décrit par le mobile pendant le temps dt; le travail élémentaire de la force P sera représenté dans tous les cas en grandeur et en signe par :

Fig. 134



$$P ds \cos \omega.$$

Ce travail élémentaire sera nul si $\cos \omega = 0$, c'est à dire si le déplacement est normal à la force. L'expression précédente du travail élémentaire peut encore s'écrire :

$$P \cos \omega \, ds = T ds,$$

en nommant T la composante tangentielle de la force motrice; on peut donc dire que le travail élémentaire de la force P est égal au produit de l'arc ds décrit dans le temps dt par la composante tangentielle T de la force P. Nous considérerons dans cette expression ds comme positif; nous voyons alors qu'il faudra donner à la composante tangentielle T le signe + quand elle agira dans le sens du mouvement, et le signe —

dans le cas contraire. On peut encore donner une autre expression simple du travail élémentaire ; on a en effet :

$$\cos \omega = \frac{X}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\frac{dz}{ds},$$

et il en résulte :

$$P ds \cos \omega = X dx + Y dy + Z dz.$$

En partant de l'expression du travail élémentaire :

$$P ds \cos \omega,$$

on voit que : ***Le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point matériel est égal à la somme des travaux de ces dernières forces.*** On le voit immédiatement en se rappelant que la projection sur une droite quelconque de la résultante d'un certain nombre de forces concourantes est égale à la somme algébrique des projections de ces forces sur la même droite.

On nomme ***travail total*** d'une force P pour un chemin déterminé AB la limite de la somme des travaux élémentaires obtenus en divisant l'arc AB en un nombre infini de parties infiniment petites ; on voit que ce travail total aura pour expression :

$$\int_{s_0}^{s} P ds \cos \omega = \int_{s_0}^{s} T ds = \int (X dx + Y dy + Z dz).$$

Il est évident que le travail de la résultante de plusieurs forces pour un déplacement fini est égal à la somme des travaux des composantes.

Les forces normales à la trajectoire n'influent pas sur le travail total, ou, si l'on veut, leur travail est nul.

Relation entre le travail et la force vive.

48. Nous avons trouvé précédemment, pour un point matériel libre, ou assujetti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface fixe, l'équation :

$$d.\frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz;$$

mais nous venons de voir que :

$$Xdx + Ydy + Zdz = Tds,$$

donc nous aurons :

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{s_0}^{s} Tds.$$

Cette relation exprime que :

L'accroissement de force vive du mobile, quand il passe d'une position à une autre, est égal au double du travail de la force motrice.

Si la force P est la résultante de plusieurs forces P_1, P_2... dont les composantes tangentielles sont T_1, T_2..., on aura :

$$T = T_1 + T_2 + \ldots,$$

$$\int Tds = \int T_1 ds + \int T_2 ds + \ldots,$$

par suite :

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\left(\int T_1 ds + \int T_2 ds + \ldots\right).$$

Si donc on appelle forces mouvantes celles qui font un angle aigu avec la direction du déplacement, forces résistantes celles qui font un angle obtus, on pourra dire que :

L'accroissement de force vive d'un mobile, lorsqu'il passe d'une position à une autre, est égal au double de l'excès du travail des forces mouvantes sur le travail des forces résistantes.

Ce principe porte le nom de principe des *forces vives*, ou de principe *du travail*, pour le cas d'un simple point matériel.

On pourrait, dans la *Mécanique rationnelle,* se passer à la rigueur de considérer le travail et appliquer dans tous les cas le théorème des forces vives sous la forme :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz);$$

mais lorsqu'on s'occupe des machines, le travail devient un élément d'une importance capitale, il en est de même dans les applications à la théorie mécanique de la chaleur.

Nous ferons souvent usage de la notion du travail; nous allons appliquer les considérations précédentes au cas déjà traité d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force qui est une fonction donnée de la distance.

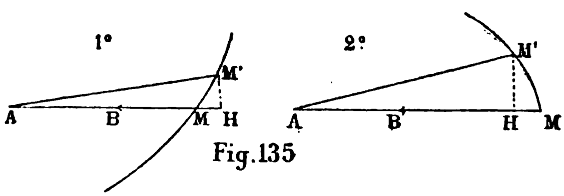


Fig.135

Soient M et M′ deux positions infiniment voisines du point matériel. Posons : $\mathrm{AM} = r$, $\mathrm{AM}' = r'$.

Cherchons le travail élémentaire de la force attractive

$$\mathrm{MB} = f(r).$$

1° $r' > r$.

Abaissons du point M′ une perpendiculaire M′H sur MA, nous aurons :

$$\mathrm{MH} = + dr,$$

en négligeant un infiniment petit du second ordre; le travail élémentaire est :

$$-\mathrm{MB} \times \mathrm{MH} = - f(r)\, dr.$$

2° $r' < r$, $\mathrm{MH} = -dr$.

Le travail élémentaire est :

$$+\,\mathbf{MB} \times \mathbf{MH} = -f(r)\,dr.$$

On a donc dans les deux cas :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -2\int_{v_0}^{v} f(r)\,dr.$$

Si la force était répulsive, il faudrait changer le signe de $f(r)$.

CHAPITRE VI

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE COURBE FIXE.

49. Nous supposerons que par un moyen quelconque on assujettisse le mobile à se mouvoir sur une courbe fixe donnée; nous faisons abstraction du frottement; dans ces conditions la courbe ne peut détruire ni produire que des forces normales; dans chacune de ses positions, le mobile exercera sur la courbe une pression normale dont nous représenterons l'intensité par R; la courbe exercera une réaction normale N égale et contraire à R, et si l'on introduit cette réaction inconnue N dont on ne sait qu'une chose : à savoir qu'elle est contenue dans le plan normal à la courbe, on pourra considérer le point matériel comme entièrement libre. Soit P la résultante des forces extérieures qui agissent sur le mobile; par la force P et la tangente MT faisons passer un plan qui coupe le plan normal à la courbe suivant la droite MQ; décomposons la force P en deux autres, l'une T suivant MT, l'autre Q suivant MQ. Le point M sera donc soumis à l'action de la force tangentielle T et des forces Q et N normales à la trajectoire. Nous aurons donc :

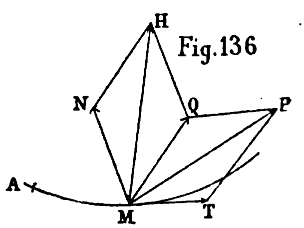


Fig.136

(1) $$m\frac{dv}{dt} = \mathrm{T};$$

$m\frac{v^2}{\rho}$ = somm. proj. de Q et de N sur la normale principale MH.

Soient A l'origine des arcs et AM le sens positif de ces arcs; on aura :

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

La force T sera positive quand elle agira dans le sens AM; négative dans le cas contraire. L'équation (1) pourra s'écrire :

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \mathrm{T}. \tag{3}$$

Des équations de la courbe on tirera :

$$x = f(z); \quad y = \varphi(z),$$

puis on aura :

$$s = \int \sqrt{1 + f'(z)^2 + \varphi'(z)^2}\, dz.$$

On aura donc par une quadrature z, puis x et y en fonction de s.

Ainsi x, y, z sont, par les équations de la courbe, des fonctions connues de s; il en est de même de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; P et par suite T est une fonction de la position du mobile du temps t et de la vitesse qui peut entrer par v et $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. On a donc :

$$\mathrm{T} = \psi\left(t, s, \frac{ds}{dt}\right).$$

Nous serons donc ramenés à intégrer l'équation du second ordre :

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \psi\left(t, s, \frac{ds}{dt}\right), \tag{4}$$

équation tout à fait semblable à celle rencontrée dans le mouvement rectiligne d'un point matériel.

L'intégrale générale de cette équation différentielle étant supposée connue, on déterminera les deux constantes qu'elle contiendra, en écrivant que pour $t = t_0$:

$$s = s_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = v_0;$$

s et par suite x, y, z seront connus en fonction du temps et le problème sera résolu.

Soient X, Y, Z les composantes de la force P; on aura :

$$T = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}.$$

L'équation (3) pourra donc s'écrire :

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds},$$

ou bien :

$$\tfrac{1}{2}\, d.m\frac{ds^2}{dt^2} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

C'est l'équation à laquelle nous étions déjà parvenus d'une autre manière.

Considérons le cas où la fonction des forces existe; on déduit de l'équation précédente :

$$m\frac{ds^2}{dt^2} = mv_0^2 + 2F(x,y,z) - 2F(x_0,y_0,z_0),$$

d'où, en vertu des équations de la courbe :

$$m\frac{dz^2}{dt^2}\left\{1 + f'^2(z) + \varphi'^2(z)\right\} = mv_0^2 - 2F(x_0,y_0,z_0) + 2F[f(z),\varphi(z),z],$$

ce qui donne :

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \theta(z).$$

On en déduit :

$$(5) \qquad t - t_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\theta(z)}}; \quad x = f(z); \quad y = \varphi(z).$$

On pourra donc trouver z et par suite x et y en fonction de t. Ainsi, dans le cas où l'intégrale des forces vives existe, le problème est ramené aux quadratures, et même à une seule quadrature.

50. Exemple. — *Un point matériel assujetti à rester sur une courbe plane donnée est soumis à une force dirigée constamment vers un centre fixe situé dans le plan de cette courbe, et dont l'intensité est une fonction donnée $f(r)$ de la distance r du mobile au centre. Trouver le mouvement.*

L'intégrale des forces vives existe et on a :

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2}{m}\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr.$$

Soit :

$$\theta = \varphi(r),$$

l'équation de la courbe en prenant pour pôle le point fixe O ; on aura :

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2}\left[1 + r^2\varphi'^2(r)\right].$$

On en déduit :

$$dt = \frac{\sqrt{1 + r^2\varphi'^2(r)}\,dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2}{m}\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr}};$$

$$t = \int_{r_0} \frac{\sqrt{1 + r^2\varphi'^2(r)}\,dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2}{m}\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr}}.$$

51. Détermination de la pression que le mobile exerce sur la courbe. — La résultante des forces normales MQ et

MN (49) doit être dirigée suivant la normale principale et être égale à $\frac{mv^2}{\rho}$, ρ désignant le rayon de courbure de la courbe donnée en M; la force MH est ce qu'on nomme la force *centripète,* une force MK égale et contraire à la force centripète est ce que l'on nomme force *centrifuge.* Les trois forces MQ, MN et MK se feront équilibre; donc la résultante des forces MQ et MK sera égale et directement opposée à MN. Cette force égale et opposée à MN est la pression MR du mobile sur la courbe. De là, ce théorème :

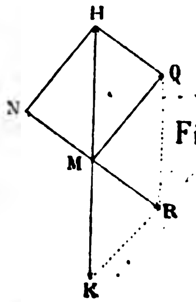


Fig. 137

La pression exercée sur la courbe est la résultante de la composante normale de la force motrice et de la force centrifuge.

Si ces deux dernières forces sont connues, en grandeur et en direction, il en sera de même de la pression. Si la force P est constamment nulle, il en sera de même de ses composantes T et Q; l'équation (1) donnera :

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad v = \text{const.},$$

donc le mouvement sur la courbe sera uniforme. Le théorème démontré plus haut nous montre que, dans ce cas, la pression exercée par le mobile sur la courbe est égale en grandeur et en direction à la force centrifuge; elle est donc dirigée suivant la normale principale, en sens inverse du rayon de courbure, et elle a pour expression $\frac{mv^2}{\rho}$; la réaction de la courbe est égale à la force centripète.

CHAPITRE VII

APPLICATIONS A QUELQUES QUESTIONS RELATIVES AU MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR UNE COURBE DONNÉE.

52. Mouvement d'un point matériel pesant sur une courbe donnée. — On suppose que le mouvement a lieu dans le vide et on néglige le frottement sur la courbe. Soit la courbe M_0AB; A le point le plus bas, B le point le plus haut, M_0 le point de départ que nous prendrons pour origine de l'axe M_0Z qui sera vertical et dirigé vers le bas. Nous supposerons d'abord nulle la vitesse initiale en M_0. Le principe des forces vives nous donne, en désignant par v la vitesse du mobile en un point quelconque de sa trajectoire et par z la distance au point M_0 projetée sur la verticale :

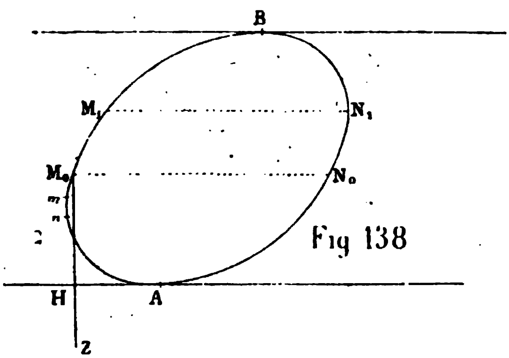


Fig 138

$$v^2 = 2gz,$$

le mobile descendant, v augmente, est maximum en A où $v_0^2 = 2g \times M_0H$.

La vitesse maxima est donc la même que si le mobile était tombé librement de M_0 en H. Au delà du point A la vitesse diminue, elle s'annule au point N_0 situé sur le plan horizontal qui passe par le point M_0; le point redescendra ensuite en A, remontera en M_0, etc. Les oscillations seront isochrones, car si nous considérons un petit élément mn de la courbe, il sera parcouru avec la même vitesse dans le mouvement descendant et dans le mouvement ascendant; le temps employé pour aller de M_0 en A sera généralement différent du temps employé pour aller de A en N_0, à moins que la courbe ne soit symétrique par rapport à la verticale du point A.

Supposons maintenant que la vitesse initiale v_0 ne soit pas nulle et posons :

$$v_0^2 = 2gh;$$

nous aurons :

$$v^2 = 2g(z + h). \tag{1}$$

Soit M_1 le point de la courbe distant de M_0 de la quantité h suivant la verticale; la vitesse v_0 pourra être produite en supposant que le point tombe sur la courbe à partir de M_1 jusqu'en M_0, la vitesse initiale étant nulle en M_1. Il y a deux cas à considérer :

1° h est inférieur à la distance K du point culminant B au plan horizontal qui passe par M_0; alors le point M_1 existe sur la courbe; le mobile va de M_0 en A, de A en N_1, puis il revient de N_1 en M_1; il exécute donc sur la courbe des oscillations isochrones.

2° h est supérieur à la distance K; alors, la formule :

$$v^2 = 2g(z + h),$$

nous montre que le mobile parti de M_0 avec la vitesse v_0 descend jusqu'en A et remonte en B, car la vitesse ne s'annule plus; il reviendra en M_0 avec la vitesse v_0; il fera donc une suite indéfinie de révolutions, qui auront toutes une égale durée dépendante de la forme de la courbe et de la grandeur de h.

Pour déterminer la position du mobile sur la courbe à un instant quelconque, on remarque que l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(z + h). \tag{2}$$

On tirera des équations de la courbe s en fonction de z et l'on aura :

$$s = f(z) \quad ds = f'(z)dz,$$

de (2) nous tirons :

$$\sqrt{2g}\, t = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{z+h}}. \tag{3}$$

Considérons le cylindre circonscrit à la courbe et dont les génératrices sont verticales, si l'on développe la surface de ce cylindre sur l'un de ses plans tangents, on aura une courbe pour laquelle z et s seront les mêmes en chaque point qu'au point correspondant de la courbe primitive ; donc l'équation (3) sera la même pour les deux courbes, le mouvement sera le même si v_0 et s_0 sont les mêmes. On peut donc ramener l'étude du mouvement d'un point pesant sur une courbe gauche à celle du mouvement sur une courbe plane.

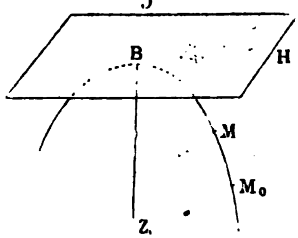
Entre les deux cas considérés plus haut, il y aura un cas intermédiaire, celui où $h = K$, je dis que dans ce cas le mobile n'arrivera au point B qu'au bout d'un temps infini et avec une vitesse nulle.

Il suffit de montrer que le mobile mettra un temps infini pour aller de N_0 en B ; nous allons donc prouver le théorème suivant :

53. Théorème. — *Un point matériel pesant* M *est astreint à décrire sans frottement une courbe plane ou gauche* MB *(fig. 139) ; sa position initiale est* M_0 *et sa vitesse initiale* v *est celle qui serait due à la hauteur comprise entre le point* M_0 *et le plan horizontal mené par le point le plus élevé* B ; *cette vitesse initiale est d'ailleurs dirigée dans le sens* M_0B. *On* *demande de démontrer que le mobile met un temps infini pour aller de* M_0 *en* B.

Prenons le point B pour origine de l'axe vertical BZ; soit z_0 l'ordonnée de M_0 et z l'ordonnée d'un point quelconque M compris entre B et M_0; on aura par le théorème des forces vives :

Fig. 139



$$v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0).$$

Or, par hypothèse :

$$v_0^2 = 2gz_0,$$

donc :

$$v^2 = 2gz.$$

Soient : $BM_0 = s_0$, $BM = s$, on a :

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad \frac{ds^2}{dt^2} = 2gz.$$

On en déduit :

$$\sqrt{2g}\, dt = -\frac{ds}{\sqrt{z}},$$

$$t\sqrt{2g} = -\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{z}};$$

$$(4) \qquad t\sqrt{2g} = \int_{s}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{z}}.$$

Soient : γ l'angle que fait avec BZ la tangente en M;

ζ l'angle que fait avec BZ la normale principale en M;

ρ le rayon de courbure en M.

On a :

$$d.\cos\gamma = \cos\zeta \frac{ds}{\rho},$$

ou bien, à cause de $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$,

$$\frac{d\cdot\frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{\cos\zeta}{\rho}.$$

Soit $\frac{1}{K}$ une limite supérieure des valeurs que prend le rapport $\frac{\cos\zeta}{\rho}$ pour les divers points de l'arc M_0B; on aura :

$$\frac{\cos\zeta}{\rho} < \frac{1}{K}, \tag{5}$$

$$\frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds} < \frac{1}{K},$$

ou bien :

$$\frac{d.}{ds}\left\{\frac{dz}{ds} - \frac{1}{K}s\right\} < 0;$$

donc la fonction :

$$\frac{dz}{ds} - \frac{1}{K}s,$$

est décroissante quand s croît de zéro à s_0; mais pour $s = 0$ cette fonction est nulle, car en B la tangente étant horizontale $\frac{dz}{ds} = 0$; donc cette fonction est négative pour tous les points compris entre M_0 et B; ainsi :

$$\frac{dz}{ds} - \frac{s}{K} < 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{ds}\left(z - \frac{s^2}{2K}\right) < 0.$$

Donc, la fonction $z - \frac{s^2}{2K}$ est décroissante, or, elle est nulle pour $s = 0$, donc elle est constamment négative, et l'on a :

$$z - \frac{s^2}{2K} < 0; \quad z < \frac{s^2}{2K}.$$

Dans l'intégrale qui figure dans le second membre de l'équation (4), et dont tous les éléments sont positifs, si l'on remplace z par la quantité plus grande $\frac{s^2}{2K}$, on diminuera l'intégrale; donc on a :

$$t\sqrt{2g} > \int_{s}^{s_0} \sqrt{2K}\,\frac{ds}{s}$$

ou bien :

$$t > \sqrt{\frac{K}{g}}\,\log\frac{s_0}{s}.$$

Si l'on fait tendre s vers zéro, on voit que t tend vers l'infini; la formule :

$$v^2 = 2gz$$

montre du reste que v tend vers zéro.

54. Cas d'exception. — La méthode précédente est en défaut lorsque le rayon de courbure de la courbe est nul au point B; le rapport $\frac{\cos\zeta}{\rho}$ n'a pas en effet dans ce cas de limite supérieure puisqu'il est infini au point B. Dans ce cas le temps nécessaire pour atteindre le point B dans les conditions indiquées (53) peut être fini.

Nous allons en donner un exemple.

Considérons la courbe :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Le rayon de courbure a pour expression :

$$\rho = 3\,l^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{1}{3}},$$

il est nul aux points B, B_1, C, C_1.

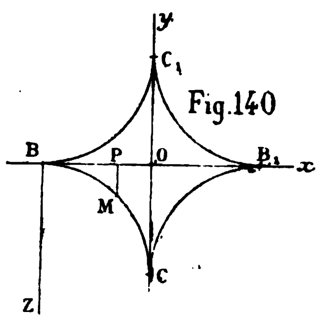


Fig.140

On a :

$$x = \left(l^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d'où :

$$\frac{ds^2}{dy^2} = l^{\frac{2}{3}}\,y^{-\frac{2}{3}}.$$

Supposons qu'on assujettisse un point pesant à se mouvoir sur cette courbe, à partir du point C, avec la vitesse qui serait due à la hauteur de chute OC; cherchons le temps T qu'il mettra pour arriver en B. Le mobile est lancé dans la direction CB. Menons la verticale BZ; soit $s = \mathrm{BM}$, $z = \mathrm{MP}$. On aura :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2gz.$$

Or, on tire de l'équation de la courbe :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = l^{\frac{2}{3}} z^{-\frac{2}{3}} \frac{dz^2}{dt^2},$$

donc :

$$l^{\frac{2}{3}} z^{-\frac{2}{3}} \frac{dz^2}{dt^2} = 2gz;$$

résolvant par rapport à dt et intégrant on aura :

$$\mathrm{T}\sqrt{2g} = l^{\frac{1}{3}} \int_0^l z^{-\frac{5}{6}}\, dz = 6\sqrt{l},$$

$$\mathrm{T} = 3\sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

Ainsi, ce temps est fini et égal au triple du temps que mettrait le mobile pour monter verticalement de C en O, s'il était lancé avec la vitesse v_0.

55. Problème. — *Un point matériel pesant est astreint à parcourir sans frottement la courbe plane ou gauche* C, *on le place en* N_0 *sans vitesse initiale ; on demande de trouver deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure du temps* T *que met le mobile à aller du point* N_0 *au point le plus bas* A.

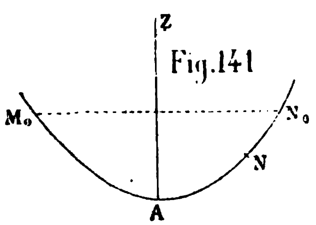


Fig. 141

Posons :

$$\mathrm{AN} = s, \quad \mathrm{AN}_0 = s_0.$$

Soient z_0 et z les hauteurs verticales des points N_0 et N au-dessus du point A. La vitesse v en N sera donnée par l'équation :

$$v^2 = 2g(z_0 - z) = \frac{ds^2}{dt^2}.$$

On en déduit :

$$\sqrt{2g}\,dt = \frac{-\,ds}{\sqrt{z_0 - z}},$$

$$\sqrt{2g}\,\mathrm{T} = -\int_{s_0}^{0} \frac{ds}{\sqrt{z_0 - z}},$$

(5)
$$\mathrm{T}\sqrt{2g} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{z_0 - z}}.$$

Soient, en gardant les notations du numéro (53), $\frac{1}{\mathrm{K}}$ et $\frac{1}{k}$ les limites supérieures et inférieures du rapport $\frac{\cos\zeta}{\rho}$ pour les divers points de l'arc AN_0; on aura :

(6)
$$\frac{1}{k} < \frac{\cos\zeta}{\rho} < \frac{1}{\mathrm{K}},$$

$$\frac{1}{k} < \frac{d\cdot\frac{dz}{ds}}{ds} < \frac{1}{\mathrm{K}}.$$

On en déduit :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds} - \frac{s}{k}\right) > 0; \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds} - \frac{s}{\mathrm{K}}\right) < 0;$$

donc la fonction $\frac{dz}{ds} - \frac{s}{k}$ est croissante, et la fonction $\frac{dz}{ds} - \frac{s}{\mathrm{K}}$ est décroissante, quand s croît de 0 à s_0; ces deux fonctions sont nulles pour $s = 0$, parce que le point A étant le point le plus bas, $\frac{dz}{ds}$ est nul en ce point. On a donc :

$$\frac{dz}{ds} - \frac{s}{k} > 0; \quad \frac{dz}{ds} - \frac{s}{\mathrm{K}} < 0;$$

or :

$$\frac{dz}{ds} - \frac{s}{k} = \frac{d}{ds}\left(z - z_0 + \frac{s_0^2}{2k} - \frac{s^2}{2k}\right),$$

donc, la fonction :

$$z - z_0 + \frac{s_0^2}{2k} - \frac{s^2}{2k}$$

est décroissante quand s croît de zéro à s_0; mais cette fonction est nulle pour $s = s_0$; donc, pour une valeur de s comprise entre 0 et s_0 elle est positive. On a donc :

$$z - z_0 + \frac{s_0^2}{2k} - \frac{s^2}{2k} > 0,$$

$$z_0 - z < \frac{s_0^2}{2k} - \frac{s^2}{2k}.$$

On verrait de même que l'on a :

$$z_0 - z > \frac{s_0^2}{2K} - \frac{s^2}{2K}.$$

En tenant compte de ces inégalités, la formule (5) donnera :

$$T\sqrt{2g} > \sqrt{2k}\int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}},$$

$$T\sqrt{2g} < \sqrt{2K}\int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}}.$$

Or :

$$\int \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \text{arc sin}\,\frac{s}{s_0},$$

$$\int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \frac{\pi}{2};$$

on a donc :

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k}{g}} < T < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{K}{g}}.$$

Supposons que le point N_0 se rapproche de plus en plus du point A; les inégalités (6) montrent que k et K tendront vers la limite $\frac{R}{\cos i}$, R désignant le rayon de courbure de la courbe en A, et i l'angle de ce rayon de courbure avec la verticale. Les deux limites de T seront alors confondues, et l'on aura :

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g\cos i}}.$$

On trouverait le même résultat pour l'arc AM_0; donc la durée des oscillations infiniment petites, de part et d'autre du point le plus bas de N_0 en M_0, puis de M_0 en N_0, est :

$$\pi\sqrt{\frac{R}{g\cos i}}.$$

Les petites oscillations sont isochrones et leur durée est indépendante de l'amplitude.

56. Problème — *Un point pesant est astreint à parcourir sans frottement une courbe plane donnée; on demande de calculer la pression qu'il exerce à chaque instant sur la courbe.*

Prenons l'axe des z vertical et dirigé vers le bas; nous aurons :

$$v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0),$$

ou en faisant :

$$v_0^2 - 2gz_0 = 2gh,$$

$$v^2 = 2g(z + h). \tag{1}$$

Nous savons que la pression est la résultante de la force centrifuge et de la composante normale du poids. Désignons par θ l'angle inférieur à π que fait avec l'axe des z le rayon mené de chaque point de la courbe au centre de courbure, la pression sera en valeur absolue :

$$mg\cos\theta - \frac{mv^2}{\rho}.$$

Soit R cette pression; on aura, en remplaçant v^2 par sa valeur (1) :

$$R = \pm mg\left[\cos\theta - \frac{2(z+h)}{\rho}\right].$$

Lorsque $\cos\theta - \frac{(2z+h)}{\rho}$ est positif, la pression est dirigée de la courbe vers le centre de courbure; lorsque cette quantité est négative, la pression est dirigée du centre de courbure vers la courbe; ρ doit être pris positivement dans les deux cas.

Les points où la pression est nulle sont importants à connaître; en effet, c'est en ces points que la pression change de sens et que par conséquent le mobile quitte la courbe. Les points dont il s'agit satisfont à la condition :

$$\cos\theta = \frac{2(z+h)}{\rho},$$

condition qui exprime l'égalité en grandeur et en direction de la force centripète, et de la composante normale du poids.

Lorsque le point quitte la courbe, il décrit une parabole qui a avec la courbe donnée un contact du deuxième ordre, parce qu'en ce point la courbe donnée et la parabole décrite ont même tangente et même rayon de courbure; en effet $\frac{mv^2}{\rho}$ a en ce point la même valeur pour les deux courbes, cette valeur étant $mg\cos\theta$; v est le même; donc ρ est le même.

Si le mobile est simplement posé sur la courbe, il faut une certaine condition pour que le mobile ne quitte pas la courbe.

Si le point est placé dans la *concavité*, il faut que la pression soit dirigée en sens inverse du rayon de courbure; donc

$$\cos\theta - \frac{2(z+h)}{\rho} < 0.$$

Cela aura toujours lieu si $\theta > \frac{\pi}{2}$.

Si le point est placé sur la convexité, il faut que la pression sur la courbe s'exerce dans le sens du rayon de courbure; c'est à dire que :

$$\cos\theta - \frac{2(z+h)}{\rho} > 0.$$

Cela n'aura jamais lieu si $\theta > \frac{\pi}{2}$.

Nous allons appliquer ces considérations au problème suivant :

57. Problème. — *Un point matériel pesant* M *est placé dans la concavité d'une circonférence de rayon* R *dont le plan est vertical; la position initiale du mobile est le point le plus bas* A; *la vitesse initiale* v_0 *dirigée vers* AM *est celle qui est due à la hauteur* h. *On demande les conditions qui doivent être remplies pour que le mobile reste toujours sur la circonférence, ou la quitte à un certain moment.*

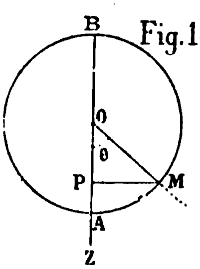


Fig. 142

Prenons l'axe des z vertical et dirigé vers le bas. Posons :

$$BP = z, \quad z_0 = 2R;$$

on a d'ailleurs par hypothèse :

$$v_0^2 = 2gh.$$

La vitesse v lorsque le mobile sera en M sera donnée par l'équation :

$$v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0).$$

On a d'ailleurs :

$$z = R + R\cos\theta.$$

Soit N la pression que le mobile exerce sur la courbe, on a :

$$\frac{N}{m} = \frac{v^2}{R} + g\cos\theta;$$

N et v sont donc donnés par les équations :

$$(1) \qquad v^2 = 2g\,(h + \mathrm{R}\cos\theta - \mathrm{R}),$$

$$(2) \qquad \mathrm{N} = mg\left(\frac{2h}{\mathrm{R}} + 3\cos\theta - 2\right);$$

v s'annule pour $\theta = \theta'$, θ' étant déterminé par l'équation :

$$(3) \qquad \cos\theta' = 1 - \frac{h}{\mathrm{R}};$$

cet angle θ' n'existe que si l'on a $h < 2\mathrm{R}$; pour $h < \mathrm{R}$, il est aigu; il est obtus pour $h > \mathrm{R}$.

N s'annule pour $\theta = \theta''$, θ'' étant déterminé par l'équation

$$(4) \qquad \cos\theta'' = \tfrac{2}{3}\left(1 - \frac{h}{\mathrm{R}}\right),$$

cet angle θ'' n'existe que si l'on a :

$$\tfrac{2}{3}\left(1 - \frac{h}{\mathrm{R}}\right) > -1,$$

d'où :

$$h < \frac{5\mathrm{R}}{2},$$

θ'' est aigu pour $h < \mathrm{R}$, et obtus pour $h > \mathrm{R}$.

On est conduit à distinguer les cas suivants :

1° Si $h > \frac{5\mathrm{R}}{2}$. θ' et θ'' sont imaginaires; v et N ne s'annulent jamais; le mobile ne quitte pas la courbe, et parcourt un nombre indéfini de fois la circonférence entière.

2° $2\mathrm{R} < h < \frac{5\mathrm{R}}{2}$. θ' est imaginaire, θ'' réel; le mobile quitte la courbe à un moment donné.

3° $\mathrm{R} < h < 2\mathrm{R}$, θ' et θ'' sont réels et obtus; l'équation

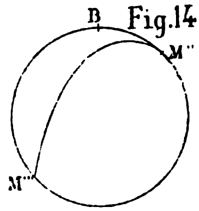
$$(5) \qquad \cos\theta'' = \tfrac{2}{3}\cos\theta',$$

donne $\theta'' < \theta'$, N s'annule avant v; le mobile quitte la courbe.

4° $h < R$. θ' et θ'' sont réels et aigus; l'équation (5) donne $\theta'' > \theta'$; donc v s'annule avant N; à ce moment, le mouvement change de sens; il est oscillatoire, et le mobile reste toujours sur la courbe; il ne la quitte donc que si h est compris entre R et $\frac{5R}{2}$.

En quittant la circonférence le point décrira une parabole tangente à la circonférence au point M' où il quitte la courbe. En ce point les deux courbes ont non seulement une tangente commune, mais encore le même rayon de courbure; car on a, dans le mouvement parabolique, en désignant par v la vitesse commune dans les deux mouvements en M' et ρ le rayon de courbure de la parabole en M' :

Fig. 143



$$\frac{mv^2}{\rho} = \text{comp. normale du poids,}$$

et sur le cercle :

$$\frac{mv^2}{R} = \text{compos. normale du poids,}$$

à cause de $N = 0$.

Donc :

$$\rho = R.$$

Les deux courbes ont trois points communs en M'. Il y a un quatrième point d'intersection que l'on trouvera aisément; on l'obtiendra en portant, comme le calcul le montre, à partir du point B et à gauche de ce point un arc $BM''' = 3BM'$. On pourra déterminer h de manière que la parabole passe par un point donné.

CHAPITRE VIII

MOUVEMENT DU PENDULE SIMPLE DANS LE VIDE ET DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

58. Pendule simple dans le vide. — Supposons qu'un point matériel pesant M soit attaché à l'extrémité d'un fil inextensible et sans masse OM, et que l'autre extrémité O de ce fil soit fixe. Le point M est en équilibre lorsque le fil OM est dirigé suivant la verticale OB, et le poids de ce point est détruit par la résistance qu'il éprouve de la part du fil. Si l'on écarte le corps M de sa position d'équilibre, qu'on l'amène en A, et qu'on l'abandonne ensuite à l'action de la pesanteur, sans lui communiquer de vitesse initiale, il se mouvra dans le plan AOB, sur un arc de cercle ayant le point O pour centre; on peut donc regarder le point matériel M comme étant dans les mêmes conditions que s'il était assujetti à rester sur l'arc de cercle ABA′, et soumis à une force égale à son poids; la pression exercée par le mobile sur la courbe se trouve remplacée par la tension du fil OM.

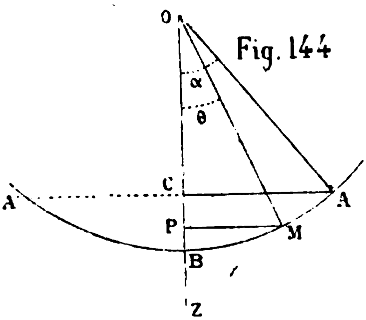


Fig. 144

D'après ce qu'on a dit, d'une manière générale, du mouvement d'un point pesant assujetti à rester sur une courbe fixe, on verra que le point A doit osciller indéfiniment, de A en A′, de A′ en A, etc. A′ désignant le point de l'arc de cercle situé sur l'horizontale du point A; toutes ces oscillations sont identiques; il suffit d'étudier l'une d'elles, ou même simplement le mouvement de A en B. On a en posant :

$$OM = l,\quad AOB = \alpha,\quad MOB = \theta,\quad AM = s,\quad OC = z_0,\quad OP = z;$$

en désignant par v la vitesse du mobile en M et appliquant l'équation des forces vives, ce qui élimine la tension du fil, normale à la courbe :

$$v^2 = 2g(z - z_0);\quad z_0 = l\cos\alpha;\quad z = l\cos\theta,$$

par conséquent :

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}.$$

D'ailleurs on a :

$$s = l(\alpha - \theta),$$

et :

$$v = \frac{ds}{dt} = -l\frac{d\theta}{dt},$$

d'où, en égalant les deux valeurs de v :

$$-\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}};$$

$$(1)\qquad 2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

ou en intégrant :

$$2t\sqrt{\frac{g}{l}} = -\int_\theta^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

$$(2)\qquad 2t\sqrt{\frac{g}{l}} = \int_\theta^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

t s'exprime en fonction de θ, par une intégrale elliptique.

59. Cas des oscillations très petites. — α est très petit; il en résulte que θ est aussi très petit. On peut remplacer dans (1) $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ et $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ par $\frac{\alpha^2}{4}$ et $\frac{\theta^2}{4}$, ce qui donne :

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}.$$

Il faut intégrer de manière que pour $t = 0$, $\theta = \alpha$. Donc :

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \arc\cos \frac{\theta}{\alpha}; \tag{3}$$

la constante est nulle. On déduit de (3) :

$$\theta = \alpha \cos t \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{4}$$

L'équation (4) donne la loi du mouvement; pour

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \text{on a} \quad \theta = 0;$$

ainsi la durée de la petite oscillation de A en A′ sera :

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5}$$

Il est remarquable que cette durée des petites oscillations ne dépende en aucune facon de l'amplitude α.

60. Cas des oscillations quelconques. — Calculons maintenant T quelle que soit la valeur de α. Pour cela, dans la formule (2), nous remplacerons t par $\frac{T}{2}$ et θ par zéro, ce qui nous donnera :

$$T\sqrt{\frac{g}{l}} = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

$\sin\frac{\theta}{2}$ étant toujours plus petit que $\sin\frac{\alpha}{2}$, faisons :

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi;$$

$$\text{pour } \theta = 0 \quad \text{on aura} \quad \varphi = 0,$$

$$\text{pour } \theta = \alpha \qquad\qquad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

On aura :

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi},$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$d\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}},$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Donc :

$$\frac{T}{2}\sqrt{\frac{g}{l}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}. \tag{6}$$

Le second membre est la fonction complète de première espèce de Legendre, au module $k = \sin\frac{\alpha}{2}$.

On a vu, dans le calcul intégral, comment on peut développer cette transcendante suivant les puissances de k; mais nous allons rappeler le calcul connu. On a en série convergente :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\alpha}{2}\sin^4\varphi$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\frac{\alpha}{2}\sin^6\varphi \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\;2n}\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}\sin^{2n}\varphi + \ldots$$

Si donc on pose pour abréger :

$$u_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi,$$

il viendra :

$$\frac{T}{2}\sqrt{\frac{g}{l}} = u_0 + \frac{1}{2} u_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1.3}{2.4} u_4 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots$$
$$+ \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n} u_{2n} \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} + \dots$$

Pour obtenir la valeur de u_{2n} on remarque que l'on a :

$$d.\sin^{2n-1}\varphi\cos\varphi = (2n-1)\sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi - \sin^{2n}\varphi\,d\varphi$$
$$= (2n-1)\sin^{2n-2}\varphi\,d\varphi - 2n\sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

On en conclut, en intégrant entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{2n} & = \dfrac{2n-1}{2n} u_{2n-2}, \\ u_{2n-2} & = \dfrac{2n-3}{2n-2} u_{2n-4}, \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\ u_4 & = \dfrac{3}{4} u_2, \\ u_2 & = \dfrac{1}{2} u_0. \end{array}\right.$$

En multipliant toutes ces équations membre à membre et remarquant que :

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

on trouve :

$$u_{2n} = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n} \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte pour T le développement suivant :

$$(7) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \dots \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}\right]^2 \sin^{2n}\frac{\alpha}{2} + \dots \right\}.$$

Lorsque l'angle α est très petit, on peut réduire la parenthèse à son premier terme, ce qui donne la valeur trouvée précédemment :

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On aura une valeur plus approchée en prenant les deux premiers termes, ce qui donne en remplaçant $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ par $\frac{\alpha^2}{4}$:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right),$$

on voit que la durée d'une oscillation entière est un peu augmentée par la grandeur de l'amplitude. Il en résulte que si l'on appelle n le nombre des oscillations d'un pendule simple dans le temps t quand les amplitudes sont infiniment petites, et n' le nombre des oscillations du même pendule simple dans le même temps quand les oscillations sont seulement très petites, on aura :

$$n = n'\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Remarque I. — Soit h la hauteur du point A au-dessus de l'horizontale du point B, on a :

$$h = l - l\cos\alpha = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

d'où :

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2l};$$

par conséquent la formule (7) peut s'écrire :

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{h}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \dots \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\right]^2\left(\frac{h}{2l}\right)^n + \dots\right\}.$$

Remarque II. — On peut trouver très simplement deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure, de la quantité T en partant de la formule rigoureuse :

$$\frac{T}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Tous les éléments de cette intégrale définie sont positifs et plus grands que $d\varphi$; ils sont tous plus petits que $\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{d\varphi}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. On a donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi<\frac{T}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

d'où :

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}<T<\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Il peut paraître singulier que T tende vers la quantité finie $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ lorsque α tend vers zéro, de manière que le mobile met un temps fini à décrire un arc infiniment petit, mais on s'en rend compte en remarquant que le mouvement est produit par la composante tangentielle du poids; et lorsque α est infiniment petit, cette composante est elle-même infiniment petite.

61. Intégration par les fonctions elliptiques. — Reprenons la formule :

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt=\frac{-d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}. \tag{8}$$

Cherchons le temps t que le mobile emploie à passer de M en B; θ variera de θ à zéro. Nous aurons :

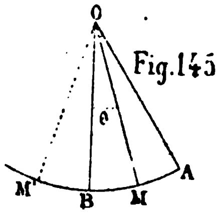


Fig. 145

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = -\int_\theta^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

En posant comme précédemment :

$$(9) \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi,$$

on trouve :

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad \text{ou} \quad k = \sin\frac{\alpha}{2};$$

on a donc, en adoptant la notation de Jacobi :

$$\varphi = am.t\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \text{mod. } k,$$

(9) donne ensuite :

$$(10) \qquad \sin\frac{\theta}{2} = k\sin am.t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$(11) \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \Delta\, am.t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$(12) \qquad \sin\theta = 2k\sin am.t\sqrt{\frac{g}{l}}\,\Delta\, am.t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

On a pour la vitesse :

$$v = -l\frac{d\theta}{dt},$$

et d'après la formule (8)

$$v = 2\sqrt{gl}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi,$$

donc :

$$v = 2k\sqrt{gl}\cos am.t\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{13}$$

Les formules (10), (11), (13) résolvent complètement le problème à l'aide des fonctions elliptiques.

Remarque. — On peut étudier le mouvement du pendule simple sans avoir recours au théorème des forces vives, mais en projetant les forces sur la tangente, ce qui élimine encore la tension.

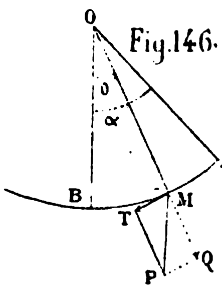


Fig.146.

Posons AM = s. On aura :

$$s = l(\alpha - \theta); \quad v = \frac{ds}{dt} = -l\frac{d\theta}{dt}.$$

Soit T la composante tangentielle du poids du point matériel. On a :

$$T = mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt} = -ml\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

d'où :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-g}{l}\sin\theta. \tag{14}$$

En multipliant par $2d\theta$ et intégrant, on aurait l'équation des forces vives; dans le cas où les oscillations ont une amplitude très faible, on peut remplacer dans (14) $\sin\theta$ par θ; on a alors l'équation linéaire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-g}{l}\theta,$$

dont l'intégrale générale est :

$$\theta = A\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

d'où :

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(-A\sin t\sqrt{\frac{g}{l}} + B\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

On doit avoir, pour $t = 0$: $\theta = \alpha$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$; donc :

$$B = 0, \quad A = \alpha.$$

On arrive donc comme précédemment à l'équation :

$$\theta = \alpha \cos t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Mouvement d'un pendule simple dans un milieu résistant.

62. La résistance est proportionnelle à la vitesse. — Représentons la résistance R par $m\mu v$; cette force est dirigée suivant la tangente à la courbe, et opposée au mouvement; en projetant les forces sur cette tangente, nous éliminerons encore la tension du fil, et nous aurons :

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \theta - \mu v.$$

On trouvera comme précédemment :

$$v = -l \frac{d\theta}{dt}.$$

Substituant dans l'équation précédente, nous pourrons la mettre sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\mu \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

En nous bornant au cas des petites oscillations, nous pouvons écrire en remplaçant $\sin \theta$ par θ :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\mu \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0,$$

équation linéaire à coefficients constants; l'équation caractéristique est :

$$r^2 + 2\mu r + \frac{g}{l} = 0.$$

On en tire :

$$r = -\mu \pm \sqrt{\frac{g}{l} - \mu^2}\sqrt{-1},$$

μ^2 est petit devant $\frac{g}{l}$; nous avons pour intégrale générale :

$$(1) \qquad \theta = e^{-\mu t}(\mathrm{A} \cos \mathrm{K}t + \mathrm{B} \sin \mathrm{K}t).$$

En posant pour abréger :

$$\mathrm{K}^2 = \frac{g}{l} - \mu^2,$$

on tire de (1)

$$(2) \qquad \frac{d\theta}{dt} = e^{-\mu t}\left\{(\mathrm{KB} - \mu\mathrm{A}) \cos \mathrm{K}t - (\mathrm{KA} + \mu\mathrm{B}) \sin \mathrm{K}t\right\},$$

on doit avoir, pour $t = 0$, $\theta = \alpha$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$; les équations (1) et (2) donnent :

$$\alpha = \mathrm{A},$$

$$\mathrm{KB} - \mu\mathrm{A} = 0; \qquad \mathrm{B} = \frac{\mu}{\mathrm{K}}\alpha,$$

et il en résulte :

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} \theta &= \alpha e^{-\mu t}\left(\cos \mathrm{K}t + \frac{\mu}{\mathrm{K}} \sin \mathrm{K}t\right), \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\alpha}{\mathrm{K}}(\mu^2 + \mathrm{K}^2)\, e^{-\mu t} \sin \mathrm{K}t. \end{aligned}\right.$$

Les formules (3) font connaître à un instant quelconque la position du pendule et sa vitesse angulaire.

A la fin de chaque oscillation on a : $\frac{d\theta}{dt} = 0$, ce qui a lieu pour :

$$\mathrm{K}t = n\pi.$$

Il s'ensuit donc que les oscillations sont isochrones comme dans le vide, et que la durée d'une oscillation entière est :

$$\mathrm{T} = \frac{\pi}{\mathrm{K}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{1 - \frac{\mu^2 l}{g}},$$

en sorte que cette durée est augmentée par la résistance du milieu dans le rapport de 1 à $\sqrt{1-\frac{\mu^2 l}{g}}$.

Quant aux amplitudes, elles diminuent constamment, le facteur $e^{-\mu t}$ diminuant à mesure que t augmente; soit α_n l'amplitude de la n^e oscillation, pour laquelle :

$$t = n\mathrm{T}, \quad \mathrm{K}t = n\pi,$$

on aura :

$$\alpha_n = \alpha e^{-\frac{n\mu\pi}{\mathrm{K}}},$$

ce qui montre que les amplitudes forment une progression géométrique décroissante, dont la raison est $e^{-\frac{\mu\pi}{\mathrm{K}}}$.

Ce résultat est conforme à l'expérience. Lorsque l'amplitude est petite, par exemple lorsque l'angle α est, au plus, égal à un tiers de degré, l'expérience montre que l'amplitude diminue très lentement; ainsi, dans une expérience de Borda où l'amplitude diminuait sensiblement en suivant une progression géométrique, ce n'est qu'après 1800 oscillations qu'elle était réduite aux $\frac{2}{3}$ de sa valeur. D'après l'expression trouvée pour α_n, on aura, en appliquant le calcul à l'expérience de Borda :

$$e^{-\frac{1800\mu\pi}{\mathrm{K}}} = \frac{2}{3},$$

$$1800\frac{\mu\pi}{\mathrm{K}} = \log\frac{3}{2} = \frac{1800\,\pi}{\sqrt{\frac{g}{\mu^2 l}-1}}.$$

On tirera de là $\frac{g}{\mu^2 l}$, et on trouvera ensuite :

$$\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \times 1{,}000000002\overline{5}7.$$

Il est donc permis de négliger l'effet de la résistance de l'air dans le calcul de T. On peut admettre que, quand les oscillations sont très petites, la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse et n'influe pas sensiblement sur leur durée. Mais, lorsque les amplitudes sont un peu considérables, l'observation montre qu'elles ne décroissent plus en progression géométrique, en sorte qu'il devient nécessaire de faire une autre hypothèse sur la loi de résistance.

63. Résistance proportionnelle au carré de la vitesse. — Dans ce cas, quelle que soit l'amplitude des oscillations, on peut obtenir rigoureusement une intégrale du problème, et le ramener aux quadratures.

Soit $\frac{mgv^2}{K^2}$ la résistance de l'air.

On aura :

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\theta - \frac{gv^2}{K^2}. \tag{1}$$

On a encore *(fig. 146)* :

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad s = \mathrm{AM} = l(\alpha - \theta); \quad v = -\frac{l\,d\theta}{dt}:$$

On en déduit :

$$dt = -\frac{l\,d\theta}{v}; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{-v\,dv}{l\,d\theta} = \frac{-1}{2l}\,\frac{d.v^2}{d\theta}.$$

Par conséquent l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{d.v^2}{d\theta} - \frac{2gl}{K^2}v^2 = -2gl\sin\theta; \tag{2}$$

c'est une équation linéaire et du premier ordre en v^2; on aura, en intégrant par la formule connue et posant pour abréger :

$$\frac{2gl}{K^2} = \mu, \tag{3}$$

$$v^2 = e^{\mu\theta}\left\{ C - 2gl\int e^{-\mu\theta}\sin\theta\,d\theta \right\}.$$

Or :

$$\int e^{-\mu\theta} \sin\theta d\theta = -e^{-\mu\theta} \frac{\cos\theta + \mu \sin\theta}{1+\mu^2},$$

donc :

$$v^2 = Ce^{\mu\theta} + \frac{2gl}{1+\mu^2}(\cos\theta + \mu\sin\theta).$$

Écrivons que pour $\theta = \alpha$, $v = 0$ et nous aurons :

$$0 = Ce^{\mu\alpha} + \frac{2gl}{1+\mu^2}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha),$$

et par conséquent :

$$C = \frac{-2gl}{1+\mu^2}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\,e^{-\mu\alpha}.$$

Remplaçant C par cette valeur dans l'expression de v^2 il vient :

$$(4)\quad v^2 = \frac{2gl}{1+\mu^2}\left\{\cos\theta + \mu\sin\theta - e^{\mu(\theta-\alpha)}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\right\};$$

en tenant compte de $v = \frac{-l d\theta}{dt}$ il viendra :

$$(5)\quad \sqrt{\frac{2g}{l(1+\mu^2)}}\,dt = -\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta + \mu\sin\theta - e^{\mu(\theta-\alpha)}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}},$$

ou en intégrant :

$$(6)\quad \sqrt{\frac{2g}{l(1+\mu^2)}}\,t = \int_\theta^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta + \mu\sin\theta - e^{\mu(\theta-\alpha)}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}}.$$

Le problème est donc bien ramené aux quadratures. Bien qu'on puisse déduire de ce qui précède des résultats intéressants dans le cas où les amplitudes sont quelconques et passer ensuite aux amplitudes très petites, nous préférons nous placer immédiatement dans cette hypothèse et reprendre la solution à son début.

64. Cas des amplitudes très petites. — Si dans (1) on remplace v par $-\frac{l d\theta}{dt}$, il vient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{gl}{K^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \tag{7}$$

ou en admettant que θ soit toujours très petit et remplaçant $\sin\theta$ par θ,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = \frac{gl}{K^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \tag{8}$$

Il faut intégrer cette équation et déterminer les constantes de manière que pour $t = 0$ on ait :

$$\theta = \alpha, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Si l'on néglige la résistance de l'air, l'équation (8) se réduit à :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

On en déduit :

$$\theta = \alpha \cos t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

On peut substituer cette valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ dans le second membre de l'équation (8), nous aurons alors au lieu de l'équation (8) une équation approchée qu'il nous sera possible d'intégrer.

Cette équation (9) sera :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-g}{l}\theta + \frac{g^2\alpha^2}{2K^2} - \frac{g^2\alpha^2}{2K^2}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}}; \tag{9}$$

c'est là une équation linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre. Pour l'intégrer nous poserons, en désignant par A, B, C, D quatre constantes :

$$(10)\quad \theta = A + B\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + C\sin t\sqrt{\frac{g}{l}} + D\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Après avoir substitué dans (9) et réduit, il viendra :

$$\frac{g}{l}A - \frac{g^2\alpha^2}{2K^2} + \left(\frac{g^2\alpha^2}{2K^2} - \frac{3gD}{l}\right)\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}} = 0,$$

d'où :

$$A = \frac{g\alpha^2 l}{2K^2}; \quad D = \frac{g\alpha^2 l}{6K^2}.$$

Avec ces valeurs de A et D, (10) devient :

$$(11)\quad \theta = \frac{g\alpha^2 l}{2K^2} + B\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + C\sin t\sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{g\alpha^2 l}{6K^2}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Les constantes B et C demeurent quelconques, et l'expression (11) est l'intégrale générale de (9). Écrivons que pour $t = 0$:

$$\theta = \alpha, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

il viendra :

$$C = 0$$

$$\alpha = \frac{g\alpha^2 l}{2K^2} + B + \frac{g\alpha^2 l}{6K^2},$$

$$B = \alpha - \frac{2}{3}\frac{g\alpha^2 l}{K^2}.$$

Nous aurons donc en somme :

$$(12)\quad \theta = \frac{g\alpha^2 l}{2K^2} + \left(\alpha - \frac{2}{3}\frac{g\alpha^2 l}{K^2}\right)\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{g\alpha^2 l}{6K^2}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}\left\{\left(1 - \frac{2}{3}\frac{g\alpha l}{K^2}\right)\sin t\sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{g\alpha l}{3K^2}\sin 2t\sqrt{\frac{g}{l}}\right\}.$$

ou bien :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}\left\{1 - \frac{2}{3}\frac{g\alpha l}{K^2} + \frac{2}{3}\frac{g\alpha l}{K^2}\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}\right\},$$

$$(13)\qquad \frac{d\theta}{dt} = -\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}\left\{1 - \frac{4}{3}\frac{g\alpha l}{K^2}\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\right\}.$$

Les formules (12) et (13) résolvent le problème. La parenthèse qui figure dans $\frac{d\theta}{dt}$ se réduirait à 1, si on négligeait la résistance de l'air; elle sera dans tous les cas peu différente de 1, et ne pourra jamais s'annuler; donc $\frac{d\theta}{dt}$ ne s'annule que pour

$$\sin t\sqrt{\frac{g}{l}} = 0.$$

Si donc on nomme T le temps d'une oscillation complète du pendule, on aura :

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

en sorte que la durée d'une oscillation complète n'est nullement modifiée par la résistance de l'air supposée proportionnelle au carré de la vitesse. Cependant, cette résistance augmente le temps que le pendule emploie à atteindre la verticale, car si nous désignons ce temps par t', on aura, en faisant dans (12),

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad t = t',$$

$$(14)\qquad \frac{g\alpha l}{2K^2} + \left(1 - \frac{2}{3}\frac{g\alpha l}{K^2}\right)\cos t'\sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{g\alpha l}{6K^2}\cos 2t'\sqrt{\frac{g}{l}} = 0.$$

En négligeant la résistance de l'air, on aurait :

$$t'\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\pi}{2}.$$

Faisons donc :

$$t'\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

et la formule (14) donnera :

$$\frac{g\alpha l}{2K^2} - \left(1 - \frac{2}{3}\frac{g\alpha l}{K^2}\right)\sin\varepsilon - \frac{g\alpha l}{6K^2}\cos 2\varepsilon = 0,$$

d'où en négligeant ε^2 :

$$\varepsilon = \frac{g\alpha l}{3K^2},$$

donc :

$$t' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\alpha l}{3K^2}\sqrt{gl},$$

$$t' = \frac{T}{2} + \frac{\alpha l}{3K^2}\sqrt{gl}.$$

La résistance de l'air augmente donc la durée de la première demi-oscillation, et puisqu'elle n'influe pas sur la durée de l'oscillation entière, il faut qu'elle diminue de la même quantité la durée de la demi-oscillation ascendante.

Si dans (12) on fait $t = T$, et qu'on désigne par α' la valeur correspondante de α, on trouvera après réduction :

$$-\alpha' = \alpha\left(1 - \frac{4}{3}\frac{g\alpha l}{K^2}\right),$$

ou bien :

$$-\alpha' = \alpha\left(1 - \frac{2}{3}\alpha\mu\right),$$

en posant $\mu = \frac{2gl}{K^2}$.

On trouvera de même, en désignant par α'' l'amplitude de la deuxième oscillation :

$$-\alpha'' = \alpha'\left(1 - \frac{2}{3}\alpha'\mu\right);$$

on pourra ainsi calculer les valeurs des amplitudes successives.

Dans le cas où α est très petit, il est inutile d'examiner l'hypothèse d'une résistance proportionnelle au cube, ou à une puissance supérieure de la vitesse; car il n'en pourrait résulter, dans les valeurs de θ et de v, que des termes en α^3, α^4, ... termes que l'on a regardés comme négligeables dans les calculs précédents.

En résumé, la résistance de l'air proportionnelle à la vitesse, ou à son carré, n'influe pas sur la durée des petites oscillations du pendule; elle n'exerce qu'une petite influence pour diminuer les amplitudes, pendant la durée du mouvement.

CHAPITRE IX

MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR LA CYCLOÏDE. — COURBES TAUTOCHRONES. — BRACHYSTOCHRONE.

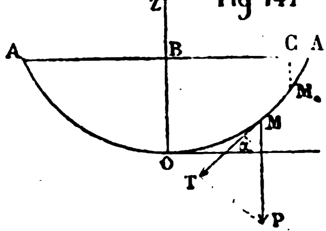
65. Mouvement d'un point pesant sur la cycloïde. — Considérons le mouvement d'un point pesant sur une cycloïde AOA′ renversée, dont l'axe OB est vertical.

Soit M la position du mobile à un instant quelconque, désignons l'arc OM par s et par z l'ordonnée du point M. Nous supposerons le mobile posé sur la courbe en M_0 sans vitesse à l'instant initial. Dans le cas où la vitesse initiale v_0 du mobile ne serait pas nulle, en supposant cette vitesse dirigée de M_0 vers O, il suffirait de poser :

$$v_0^2 = 2gh$$

et de prendre entre M_0 et A un point M'_0 distant de M_0 de la quantité h estimée suivant la verticale, le mobile placé en M'_0 sans vitesse initiale arriverait en M_0 avec la vitesse v_0; il faut supposer pour cela $M_0C > h$. Nous admettrons qu'il en soit ainsi; il nous suffira alors de considérer le cas d'un mobile partant de la position M_0 sans vitesse initiale. Faisons :

Fig 147



$$OM_0 = s_0.$$

Nous aurons l'équation :

$$m\frac{dv}{dt} = T,$$

T désignant la composante tangentielle de la force qui sollicite le mobile, c'est à dire la composante tangentielle du poids du mobile ou $-mg\cos\alpha$: la réaction normale de la courbe est ainsi éliminée : on a d'ailleurs :

$$\cos\alpha = \frac{dz}{ds}, \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Nous avons donc l'équation :

$$(1) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{dz}{ds}.$$

En appelant a le rayon du cercle générateur, on a :

$$s^2 = 8az,$$

ou bien en faisant :

$$l = 4a,$$

$$(2) \qquad s^2 = 2lz,$$

d'où :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{s}{l},$$

l'équation (1) devient :

$$(3) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{-g}{l}s.$$

L'intégrale générale de cette équation est :

$$s = A\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Il faut écrire que, pour $t = 0$:

$$s = s_0, \quad \frac{ds}{dt} = 0,$$

ce qui donne :

$$(4) \qquad s = s_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$(5) \qquad v = \frac{ds}{dt} = -s_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Les formules (4) et (5) donnent la solution complète du problème; le mouvement est oscillatoire comme on le savait d'avance, et si on désigne par T la durée de chacune des oscillations, on a :

$$(6) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ainsi, la durée des oscillations est indépendante de s_0; ce résultat n'avait lieu pour le pendule simple que dans le cas des oscillations infiniment petites. Concevons divers mobiles placés sans vitesse initiale aux divers points de l'arc OA, et laissons-les tous partir en même temps, sans vitesse; tous ces mobiles arriveront en même temps au point le plus bas O; c'est ce qu'on exprime en disant que la cycloïde est *tautochrone* dans le vide.

66. Le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc M_0O de la cycloïde, est encore indépendant de la longueur de cet arc, quand le mouvement a lieu dans un milieu résistant, et que la résistance est supposée proportionnelle à la première puissance de la vitesse. Dans ce cas, en effet, en représentant la résistance par $2m\mu v$, on a, au lieu de l'équation (3), en remarquant que $v = \frac{ds}{dt}$ est négatif, quand le mobile descend de M_0 en O, l'équation :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{-g}{l} s - 2\mu \frac{ds}{dt},$$

ou bien :

$$(7) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + 2\mu \frac{ds}{dt} + \frac{g}{l} s = 0.$$

C'est là une équation linéaire, à coefficients constants, que nous avons déjà rencontrée (62); on doit avoir, comme dans le cas du pendule circulaire, pour $t = 0$:

$$s = s_0 \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt} = 0,$$

en faisant :

$$K^2 = \frac{g}{l} - \mu^2,$$

on en déduira donc :

$$s = s_0\, e^{-\mu t}\left(\cos Kt + \frac{\mu}{K}\sin Kt\right). \tag{8}$$

Pour avoir le temps t' que le mobile met pour aller de M_0 en O, il faut faire dans l'équation précédente $s = 0$ et $t = t'$, ce qui donne :

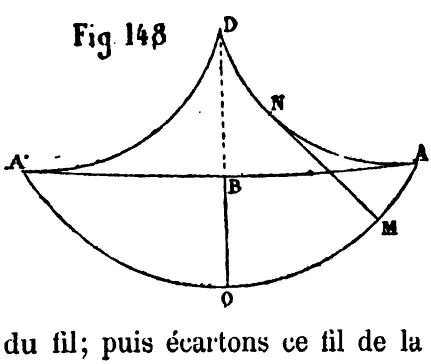
$$\cos Kt' + \frac{\mu}{K}\sin Kt' = 0,$$

$$\operatorname{tg} Kt' = \frac{-\mu}{K} = -\sqrt{\frac{g}{\mu^2 l} - 1}.$$

Cette valeur de t' est bien indépendante de s_0; le tautochronisme a donc encore lieu.

67. Pendule cycloïdal. — Construisons la développée de la cycloïde proposée; elle sera composée, comme on sait, de deux demi-cycloïdes égales AD et A'D; supposons que ces deux courbes soient tracées en relief, que DO soit un fil flexible et inextensible attaché au point fixe D; attachons aussi un point pesant à l'extrémité O du fil; puis écartons ce fil de la verticale, de sorte qu'une

Fig 148



partie DN du fil s'enroule sur la cycloïde DA, et que la partie restante soit tangente à cette courbe en N; l'extrémité M du fil décrira la cycloïde donnée, et la durée des oscillations de ce pendule, dans le vide, ou dans l'air, en supposant la résistance proportionnelle à la simple vitesse, sera rigoureusement et constamment indépendante de l'amplitude de ces oscillations. Ce moyen qui avait été proposé par Huyghens, a été abandonné; il ne serait susceptible d'aucune précision dans la pratique; du reste, l'isochronisme des grandes oscillations n'aurait plus lieu dans l'air, la résistance de ce fluide n'étant pas alors proportionnelle à la simple vitesse.

Le tautochronisme de la cycloïde dans le vide a été découvert par Huyghens; Newton l'a étendu au cas de la résistance proportionnelle à la vitesse.

La cycloïde étant une courbe plane tautochrone, si on enroule son plan sur un cylindre vertical quelconque, de manière que la base de la cycloïde coïncide avec une partie du périmètre de la section droite de ce cylindre, le mouvement d'un point pesant sur la nouvelle courbe sera le même que sur la cycloïde; la transformée de la cycloïde est donc encore tautochrone, et il existe par suite une infinité de courbes à double courbure, qui jouissent de la propriété du tautochronisme; mais on peut démontrer que la cycloïde est la seule courbe tautochrone plane.

68. Démonstration de M. Puiseux. — Soit OA une courbe

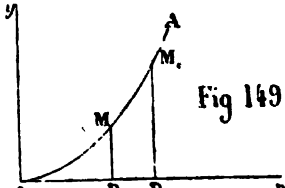


Fig 149

plane tautochrone, O le point de la courbe où le point pesant doit arriver dans le même temps T, quel que soit le point de la courbe M_0 d'où il soit parti sans vitesse initiale; prenons O pour origine, et rapportons la courbe à deux axes Oy, Ox dont l'un est vertical et dirigé vers le haut et l'autre horizontal. Soit M un point quelconque de l'arc OM_0. Posons :

$$OM = s, \quad P_0M_0 = h, \quad PM = y;$$

on aura :

$$v^2 = 2g(h - y),$$

ou :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(h - y).$$

On en tire :

$$\sqrt{2g}\, dt = -\frac{ds}{\sqrt{h - y}},$$

ou en intégrant :

$$\sqrt{2g}\, T = -\int_h^0 \frac{\frac{ds}{dy}}{\sqrt{h - y}}\, dy,$$

que l'on peut écrire :

(9) $$\sqrt{2g}\, T = \int_0^h \frac{f'(y)}{\sqrt{h - y}}\, dy,$$

en posant :

$$s = f(y).$$

Il faut déterminer $f(y)$ de manière que le second membre de l'équation (9) soit indépendant de h. Posons :

$$y = hu,$$

nous aurons :

$$\sqrt{2g}\, T = \int_0^1 \frac{f'(hu)\sqrt{h}}{\sqrt{1 - u}}\, du,$$

la dérivée $\frac{dT}{dh}$ devra être nulle ; or, on a :

$$2\sqrt{2gh}\, \frac{dT}{dh} = \int_0^1 \frac{2hu\, f''(hu) + f'(hu)}{\sqrt{1 - u}}\, du.$$

Si nous posons :

(10) $$2y\, f''(y) + f'(y) = \varphi(y),$$

nous pourrons écrire :

$$2\sqrt{2gh}\,\frac{dT}{dh} = \int_0^1 \frac{\varphi(hu)}{\sqrt{1-u}}\,du,$$

ou en remplaçant hu par y et par conséquent u par $\frac{y}{h}$:

$$\frac{dT}{dh} = \frac{1}{2h\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{\varphi(y)}{\sqrt{h-y}}\,dy.$$

On doit donc avoir, quel que soit h :

$$\int_0^h \frac{\varphi(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}\,dy = 0.$$

Cela ne peut arriver que si la fonction $\varphi(y)$ est nulle identiquement; car, autrement, on pourrait prendre h assez petit pour que de 0 à h, $\varphi(y)$ conservât toujours le même signe, et alors l'intégrale ayant tous ses éléments de même signe ne serait pas nulle. On a donc l'équation :

$$\varphi(y) = 2y\,f''(y) + f'(y) = 0,$$

d'où :

$$\frac{2f''(y)}{f'(y)} + \frac{1}{y} = 0,$$

ou en intégrant :

$$(11)\qquad f'(y) = \sqrt{\frac{c}{y}},$$

c désignant une constante arbitraire. On a donc pour la courbe cherchée :

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{c}{y}}.$$

On en conclut, en remarquant que pour $y = 0$, $s = 0$:

$$(12)\qquad s = 2\sqrt{cy}.$$

Si dans l'expression (9) on remplace $f'(y)$ par sa valeur (11), on trouve :

$$T = \sqrt{\frac{c}{2g}} \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{y(h-y)}},$$

ou, en faisant :

$$y = h \sin^2 \theta,$$

$$T = \sqrt{\frac{c}{2g}}\, 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi \sqrt{\frac{c}{2g}};$$

d'où :

$$\sqrt{c} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi},$$

et l'expression (12) de s devient :

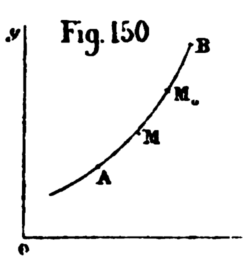
$$s = \frac{2T}{\pi} \sqrt{2gy},$$

d'où :

$$y = \frac{\pi^2}{8gT^2} s^2.$$

Cette équation représente une cycloïde qui a son sommet à l'origine, et dont l'axe, dirigé en sens contraire de la pesanteur, a pour longueur $\frac{2gT^2}{\pi^2}$. Nous allons maintenant traiter cette question plus générale :

69. *Trouver l'équation différentielle des courbes tautochrones planes, pour un point matériel sollicité par une force F toujours contenue dans le plan donné, et dont l'intensité et la direction ne dépendent que de la position de ce point.*



Soient AB la courbe cherchée, A l'extrémité des arcs qui doivent être parcourus dans le même temps T, quel que soit le point M_0 de la courbe d'où le mobile est parti sans vitesse initiale. Posons :

$$AM_0 = s_0, \quad AM = s,$$

M désignant un point quelconque de l'arc AB, dont les coordonnées sont x et y; nous désignerons par m la masse du point matériel, par mX et mY les composantes de la force qui le sollicite; la composante tangentielle de la force aura pour expression :

$$T = m\,X\frac{dx}{ds} + m\,Y\frac{dy}{ds}.$$

Cette composante devant agir dans le sens M_0A, nous la représenterons par $-m\mathrm{F}(s)$, de sorte que nous aurons :

$$\text{(1)} \qquad X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} = -\mathrm{F}(s),$$

$$T = -m\mathrm{F}(s),$$

par suite :

$$\text{(2)} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -\mathrm{F}(s);$$

d'où :

$$d\cdot\frac{ds^2}{dt^2} = -2\mathrm{F}(s)\,ds,$$

et en intégrant :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -2\int_{s_0}^{s}\mathrm{F}(s)\,ds = 2\int_{s}^{s_0}\mathrm{F}(s)\,ds;$$

on n'ajoute pas de constante, parce que, pour $s = 0$, on doit avoir $\frac{ds}{dt} = 0$, ou bien :

$$\text{(3)} \qquad \frac{ds^2}{dt^2} = 2\int_0^{s_0}\mathrm{F}(s)\,ds - 2\int_0^{s}\mathrm{F}(s)\,ds.$$

Nous poserons :

$$\text{(4)} \qquad 2\int_0^{s_0}\mathrm{F}(s)\,ds = h,$$

$$\text{(5)} \qquad 2\int_0^{s}\mathrm{F}(s)\,ds = u.$$

s sera une certaine fonction de u, s_0 et h; on voit que pour $s = 0$, $u = 0$, et pour $s = s_0$, $u = h$; la formule (3) deviendra :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = h - u,$$

d'où :

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{h-u}},$$

$$T = -\int_h^0 \frac{\frac{ds}{du}\,du}{\sqrt{h-u}},$$

(6)
$$T = \int_0^h \frac{\frac{ds}{du}\,du}{\sqrt{h-u}}.$$

Il faut déterminer l'expression de s en fonction de u, de manière que l'équation précédente, dans laquelle T est constant, ait lieu quel que soit h. Or, cette expression est identique à l'expression (9) du problème précédent; on en conclura donc, en désignant par c une constante :

(7)
$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\frac{c}{u}}; \quad s = 2\sqrt{cu}; \quad u = \frac{s^2}{4c},$$

ou bien, en remettant pour u sa valeur (5) :

$$\int_0^s F(s)\,ds = \frac{s^2}{8c},$$

d'où, en différentiant :

(8)
$$F(s) = \frac{s}{4c}.$$

En portant la valeur (7) de $\frac{ds}{du}$ dans (6), il vient :

$$T = \sqrt{c}\int_0^h \frac{du}{\sqrt{u(h-u)}} = \pi\sqrt{c},$$

d'où :

$$c = \frac{T^2}{\pi^2},$$

ce qui détermine c en fonction du temps T, et (8) devient :

$$\text{(9)} \qquad F(s) = \frac{\pi^2}{4T^2} s.$$

Telle est l'expression de la force tangentielle.

En reportant dans (1) et remarquant que l'on a :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

il viendra :

$$\frac{(X + Yy')}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{-\pi^2}{4T^2} s,$$

ou, en prenant la dérivée des deux membres par rapport à x et remarquant que :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2},$$

on a l'équation différentielle de la courbe cherchée :

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{X + Yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -\frac{\pi^2}{4T^2} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Dans cette équation différentielle du second ordre, X et Y sont des fonctions données de x et y.

70. Cas particulier. — *Cas où la force qui agit sur le mobile est une attraction dirigée vers un centre fixe O, et dont l'intensité est une fonction donnée $f(r)$ de la distance $r = OM$ du mobile à ce centre.*

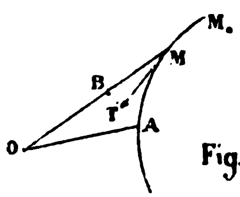


Fig. 151

Soit MB la force qui sollicite le mobile, on a :

$$MB = mf(r),$$

$$-T = mf(r) \cos TMB = mf(r) \frac{dr}{ds};$$

on a donc :

$$F(s) = f(r) \frac{dr}{ds},$$

l'équation (9) devient alors :

$$f(r)\frac{dr}{ds} = \frac{\pi^2}{4T^2}s, \tag{11}$$

on en tire :

$$\frac{\pi^2}{8T^2}d.s^2 = d.\int f(r)\,dr.$$

Soit A l'origine des arcs, posons OA $= \alpha$; nous aurons, en intégrant, et remarquant que $s = 0$ pour $r = \alpha$:

$$s^2 = \frac{8T^2}{\pi^2}\int_\alpha^r f(r)\,dr,$$

$$s = \frac{2T}{\pi}\sqrt{2\int_\alpha^r f(r)\,dr},$$

en désignant par θ l'angle polaire, on aura :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2} = \frac{T\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{f(r)\,dr}{\sqrt{\int_\alpha^r f(r)\,dr}}.$$

On en tire :

$$d\theta = \pm\frac{dr}{r}\,\frac{\sqrt{\frac{2T^2}{\pi^2}f^2(r) - \int_\alpha^r f(r)\,dr}}{\sqrt{\int_\alpha^r f(r)\,dr}}. \tag{12}$$

Le problème est ainsi ramené aux quadratures. La formule (11) montre que, au point A ou $s = 0$, $\frac{dr}{ds}$ est nul, c'est à dire que le rayon vecteur OA est normal à la courbe, ou que le point A est un sommet; cela suppose toutefois que $f(r)$ n'est pas nul en ce point; c'est à dire que $f(\alpha) \lessgtr 0$. Lorsque la force est proportionnelle à la distance, on a :

$$f(r) = Kr,$$

$$\int_\alpha^r f(r)\,dr = K\frac{r^2 - \alpha^2}{2},$$

la formule (12) devient :

$$(13) \qquad d\theta = \pm \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{\left(\frac{4T^2}{\pi^2} K - 1\right) r^2 + \alpha^2}{r^2 - \alpha^2}}.$$

On peut intégrer. Nous nous bornerons ici à indiquer les résultats du calcul :

1° La force est répulsive, $K < 0$; on trouve que la courbe est une épicycloïde;

2° La force étant attractive, $K > 0$, si l'on a en même temps $\frac{4T^2K}{\pi^2} < 1$, la courbe est encore une épicycloïde;

3° $K > 0$ et $\frac{4T^2K}{\pi^2} > 1$; la courbe est une spirale qui s'éloigne indéfiniment du centre fixe, et qui jouit de cette propriété remarquable d'être semblable à la développée de sa développée (1).

De la Brachistochrone.

71. C'est encore la cycloïde que l'on trouve, quand on cherche la *brachistochrone* dans le vide, c'est à dire la courbe AMB qu'un point matériel doit suivre pour aller dans le temps le plus court, sans vitesse initiale, du point donné A au point B également donné.

Rapportons la courbe que nous cherchons à trois axes coordonnés rectangulaires, passant au point A, l'axe des x étant vertical et dirigé vers le bas. Posons $AM = s$ et désignons par α l'x du point B. Nous aurons :

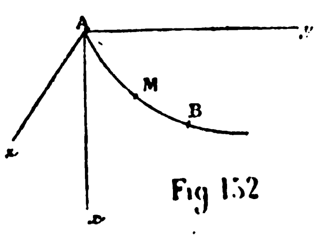


Fig 152

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad v^2 = 2gx,$$

(1) Voir, pour plus de détails, le mémoire de M. Puiseux sur les courbes tautochrones, *Journal de Liouville*, t. IX.

et par conséquent :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2gx.$$

On déduit de cette dernière équation :

$$t\sqrt{2g} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{ds}{dx} dx.$$

Le temps T que le mobile emploiera pour aller de A en B sera donc donné par l'équation :

$$(1) \qquad T\sqrt{2g} = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx,$$

ou, en faisant :

$$(2) \qquad u = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}},$$

$$(3) \qquad T\sqrt{2g} = \int_0^x \frac{u}{\sqrt{x}}\, dx.$$

T devant être minimum, la variation de l'intégrale contenue dans le deuxième membre de (3) doit être nulle. On aura donc :

$$(4) \qquad \delta \,.\int_0^x \frac{u}{\sqrt{x}}\, dx = 0,$$

nous ne ferons pas varier x, nous aurons donc :

$$(5) \qquad \int_0^x \delta u \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0;$$

or, de (2) on tire :

$$u\delta u = \frac{dy}{dx}\delta \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}\delta \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{\delta . dy}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{\delta . dz}{dx},$$

$$\delta u = \frac{1}{u}\frac{dy}{dx}\frac{d . \delta y}{dx} + \frac{1}{u}\frac{dz}{dx}\frac{d . \delta z}{dx},$$

(5) deviendra donc :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{u\sqrt{x}}\frac{dy}{dx}\frac{d.\delta y}{dx}\,dx + \frac{1}{u\sqrt{x}}\frac{dz}{dx}\frac{d.\delta z}{dx}\,dx\right) = 0.$$

Or, on a en intégrant par parties, et remarquant que δy et δz sont nuls aux points A et B :

$$\int_0^x \left[\delta y\,\frac{d\left(\frac{1}{u\sqrt{x}}\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \delta z\,\frac{d\left(\frac{1}{u\sqrt{x}}\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\right] dx = 0.$$

δy et δz étant des fonctions arbitraires de x, cela exige que l'on ait séparément :

$$\frac{d\left(\frac{1}{u\sqrt{x}}\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0; \qquad \frac{d\left(\frac{1}{u\sqrt{x}}\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = 0.$$

On en tire en désignant par C et C′ deux constantes arbitraires :

(6) $$\frac{1}{u\sqrt{x}}\frac{dy}{dx} = \mathrm{C}; \qquad \frac{1}{u\sqrt{x}}\frac{dz}{dx} = \mathrm{C}',$$

d'où :

$$\mathrm{C}'\frac{dy}{dx} - \mathrm{C}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\mathrm{C}'y - \mathrm{C}z = \text{const.}$$

La constante doit être nulle puisque la courbe doit passer par le point A. Ainsi la courbe est contenue tout entière dans le plan vertical mené par les points A et B; prenons ce plan vertical pour plan des xy, posons $\mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, et (6) deviendra :

$$\frac{1}{\sqrt{x\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

d'où :

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{x}{a - x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a - x}}.$$

C'est l'équation différentielle d'une cycloïde, dont la base est l'horizontale Ay, qui passe par le point de départ A du mobile, et dont le cercle générateur a pour diamètre a.

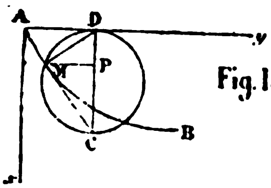


Fig. 153

On a en effet pour cette dernière cycloïde :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} MCP = \frac{MP}{CP} = \frac{\sqrt{CP \times DP}}{CP} = \sqrt{\frac{DP}{CP}} = \sqrt{\frac{x}{a - x}}.$$

La dérivée de y par rapport à x est donc la même dans les deux courbes. Pour $x = 0$, $y = 0$ dans les deux courbes, donc elles sont identiques.

Pour trouver a, on remarquera que toutes les cycloïdes sont semblables. On fera rouler sur Ay un cercle quelconque de diamètre a', ce qui donnera la cycloïde AH'; soient E' son sommet, AF' son abscisse, E le sommet de la cycloïde cherchée ; on devra avoir :

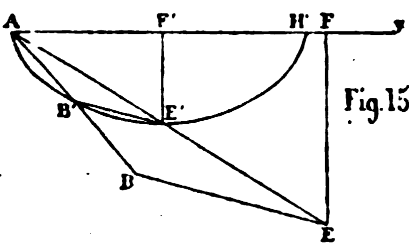


Fig. 154

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AE}{AE'};$$

or :

$$\frac{AE}{AE'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{a}{a'},$$

donc :

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{a}{a'},$$

$$a = a' \frac{AB}{AB'}.$$

On prendra donc le point B′ où AB rencontre la cycloïde auxiliaire; on joindra B′E′; on mènera BE parallèle à B′E′. Le point E sera le sommet de la cycloïde cherchée; EF sera le diamètre de son cercle générateur.

On peut également déterminer a par le calcul. Désignons par α et β les coordonnées du point B par rapport aux axes rectangulaires Ay, Ax *(fig. 153)*, nous aurons pour les équations de la brachistochrone en employant la variable auxiliaire φ :

$$x = a(1 - \cos\varphi); \quad y = a(\varphi - \sin\varphi).$$

Par conséquent :

$$\alpha = a(1 - \cos\varphi); \quad \beta = a(\varphi - \sin\varphi),$$

d'où, en éliminant φ entre ces deux équations, on trouve pour déterminer a l'équation transcendante :

$$\beta = a \arccos\left(1 - \frac{\alpha}{a}\right) - \sqrt{2a\alpha - \alpha^2}.$$

72. *Trouver la brachistochrone dans un plan, dans le cas général où il existe une fonction des forces.*

Soient v la vitesse, mX et mY les composantes de la force extérieure appliquée au mobile, x_0 et x_1 les abscisses des deux points extrêmes donnés A et B; on aura :

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx\sqrt{1 + y'^2}}{v},$$

et puisqu'il y a une fonction des forces :

$$(1)\qquad \frac{vdv}{dx} = X; \quad \frac{vdv}{dy} = Y,$$

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\,dx.$$

La variation de cette intégrale doit être nulle, on a donc l'équation :

$$\delta . \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\,dx = 0.$$

Faisons varier seulement y, nous aurons :

$$(2)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{v}\,\delta . \sqrt{1+y'^2} + \int_{x_0}^{x_1} dx\,\sqrt{1+y'^2}\,\delta . \frac{1}{v} = 0.$$

Or, on a :

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$\delta y' = \frac{d.\delta y}{dx},$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{v}\,\delta . \sqrt{1+y'^2} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'\,dx}{v\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y'$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}\,\frac{d.\delta y}{dx}\,dx;$$

en intégrant par parties, il vient :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{v}\,\delta . \sqrt{1+y'^2} = \left[\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y\right]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \delta y\, d \cdot \frac{\dfrac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}}{dx}\,dx,$$

or, δy est nul aux deux limites; on aura donc :

$$(3)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{v}\,\delta . \sqrt{1+y'^2} = -\int_{x_0}^{x_1} \delta y\, d \cdot \frac{\dfrac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}}{dx}\,dx.$$

On a, d'autre part :

$$\delta \cdot \frac{1}{v} = d \cdot \frac{\frac{1}{v}}{dx}\delta x + d \cdot \frac{\frac{1}{v}}{dy}\delta y,$$

ou bien, comme on ne fait pas varier x :

$$\delta \cdot \frac{1}{v} = d \cdot \frac{\frac{1}{v}}{dy}\delta y = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dy}\delta y,$$

et en tenant compte de (1) :

$$\delta \cdot \frac{1}{v} = -\frac{Y}{v^3}\delta y,$$

donc :

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1+y'^2}\,\delta \cdot \frac{1}{v} = -\int_{x_0}^{x_1} Y\frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{v^3}\delta y;$$

en tenant compte de (3) et (4), (2) devient :

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta y \left[d \cdot \frac{\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}}{dx} + \frac{\sqrt{1+y'^2}\,Y}{v^3} \right] dx = 0.$$

δy étant une fonction arbitraire de x, cette équation donne :

$$(5) \qquad d \cdot \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}} + \frac{Y\sqrt{1+y'^2}}{v^3}dx = 0.$$

En effectuant les calculs, et remarquant que dv doit être remplacé par $\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy$, ou, en ayant égard à (1), par $\frac{1}{v}(Xdx + Ydy) = \frac{dx}{v}(X + Yy')$, on trouve que l'équation (5) devient :

$$\frac{Y}{v^3}\sqrt{1+y'^2} + \frac{1}{v} \cdot \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y'}{v^3\sqrt{1+y'^2}}(X + Yy') = 0,$$

ou, après réduction :

$$(6) \qquad \frac{Y - Xy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{v^2 y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

On peut encore écrire, en remplaçant v^2 par sa valeur :

$$(7) \qquad Y - Xy' + \frac{2y''}{1+y'^2}\int(X\,dx + Y\,dy) = 0,$$

où l'intégrale $\int(X\,dx + Y\,dy)$ désigne une fonction connue d'x et d'y.

Cette équation différentielle du second ordre représente la brachistochrone; on déterminera les deux constantes introduites par l'intégration, en écrivant que la courbe passe par les deux points donnés A et B, (x_0, y_0), (x_1, y_1).

On peut donner une interprétation simple de l'équation (6); désignons par ρ le rayon de courbure de la brachistochrone au point x, y; par α l'angle que la tangente en ce point fait avec Ox, et supposons $y'' > 0$; alors :

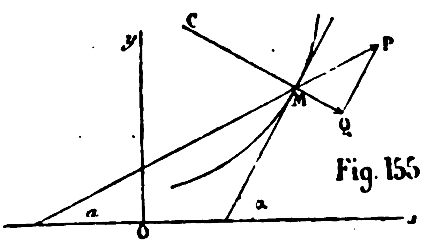


Fig. 155

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

l'équation (6) pourra s'écrire :

$$\frac{v^2}{\rho} = X \sin\alpha - Y\cos\alpha.$$

Soient P la résultante de X et Y, a l'angle que fait cette force avec Ox; on aura :

$$\frac{v^2}{\rho} = P\sin(\alpha - a).$$

Soit C le centre de courbure, MQ la projection de P sur la normale; l'équation précédente montre que cette projection est égale à $\frac{v^2}{\rho}$, et qu'elle est dirigée dans le sens opposé à MC. Donc :

Dans les brachistochrones planes, la composante normale de la force extérieure est égale en grandeur et en signe à la force centrifuge; ou bien encore :

Dans les brachistochrones planes, la pression exercée par le mobile sur la courbe est double de la composante normale de la force P.

C'est cette propriété caractéristique de la brachistochrone qu'on devra employer dans tous les cas, pour trouver rapidement son équation.

73. Application. — *Trouver la brachistochrone dans le cas où la force* P *est dirigée constamment vers un centre fixe, et ne dépend, pour son intensité, que de la distance* r *du mobile à ce centre.*

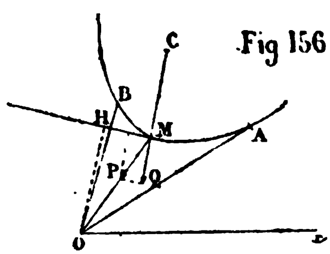


Fig 156

Désignons par p la perpendiculaire OH abaissée de l'origine sur la tangente en M. Posons :

$$OA = x, \quad OM = r, \quad MP = f(r).$$

Soit MQ la composante normale de la force MP, nous aurons :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} MQ &= \frac{v^2}{\rho} = f(r) \sin PMH, \\ p &= r \sin PMH, \end{aligned} \right. \qquad (1)$$

et par conséquent :

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{p f(r)}{r}.$$

Or :

$$\rho = \frac{-\, r\,dr}{dp},$$

$$v^2 = 2\int_r^x f(r)\,dr,$$

on aura donc :

$$2\,\frac{dp}{dr}\int_r^\alpha f(r)\,dr = -\,p\,f(r),$$

d'où :

$$d.\log.p^2 = d.\log.\int_r^x f(r)\,dr.$$

En désignant par $\frac{1}{K}$ une constante arbitraire, il viendra :

$$p^2 = \frac{1}{K}\int_r^x f(r)\,dr, \tag{2}$$

or on a :

$$\sin \mathrm{PMH} = \frac{r\,d\theta}{ds},$$

en désignant l'angle MOx par θ; (1) donnera donc :

$$p^2 = \frac{r^2}{\left(\frac{dr}{r\,d\theta}\right)^2 + 1};$$

(2) donnera ensuite :

$$\frac{Kr^2}{1 + \left(\frac{dr}{r\,d\theta}\right)^2} = \int_r^x f(r)\,dr,$$

d'où :

$$\left(\frac{dr}{r\,d\theta}\right)^2 = \frac{Kr^2 - \int_r^x f(r)\,dr}{\int_r^x f(r)\,dr}.$$

On en déduit :

$$d\theta = -\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{\int_r^\alpha f(r)\,dr}{Kr^2 - \int_r^x f(r)\,dr}}. \tag{3}$$

Au point A, $r = \alpha$; (2) donne $p = 0$; donc la courbe est tangente en A au rayon OA. L'équation (3) montre que le problème est ramené aux quadratures. Désignons AOB par φ et OB par β, on aura, pour déterminer la constante K, l'équation :

$$\varphi = \int_\beta^\alpha \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{\int_r^\alpha f(r)\,dr}{Kr^2 - \int_r^\alpha f(r)\,dr}}.$$

Exemple.

$$f(r) = 2nr,$$

$$\int_r^\alpha f(r)\,dr = n\,(\alpha^2 - r^2),$$

$$d\theta = \frac{-dr}{r}\sqrt{\frac{\alpha^2 - r^2}{hr^2 - \alpha^2 + r^2}}; \quad h = \frac{K}{n},$$

$$d\theta = \frac{-dr}{r}\sqrt{\frac{\alpha^2 - r^2}{r^2(h+1) - \alpha^2}}.$$

On peut intégrer et on trouve que la courbe est une épicycloïde.

CHAPITRE X

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SOUMIS A UNE FORCE CENTRALE.

74. THÉORÈME. — *Si un point matériel est sollicité à chaque instant par une force constamment dirigée vers un centre fixe, ce point décrit une courbe plane dont le plan passe par le centre fixe, et les aires décrites autour du centre fixe par le rayon vecteur qui va du centre fixe au mobile, sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.*

Prenons le point fixe O pour origine de trois axes rectangulaires; soient X, Y, Z les composantes suivant les axes de la force accélératrice, dirigée constamment suivant la droite MO, dans le sens MO si l'on a une attraction, dans le sens OM dans le cas d'une répulsion. On a constamment, en désignant par x, y, z les coordonnées du point M :

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}. \tag{1}$$

Les équations du mouvement du point M sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X; \quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y; \quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z. \tag{2}$$

On déduit de ces équations les combinaisons suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}&=yZ-zY=\frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right),\\ z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}&=zX-xZ=\frac{d}{dt}\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right),\\ x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}&=xY-yX=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right),\end{aligned}\right. \tag{3}$$

ce qui donne, en tenant compte de (1) :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(y\,\frac{dz}{dt}-z\,\frac{dy}{dt}\right)=0,\\ &\frac{d}{dt}\left(z\,\frac{dx}{dt}-x\,\frac{dz}{dt}\right)=0,\\ &\frac{d}{dt}\left(x\,\frac{dy}{dt}-y\,\frac{dx}{dt}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

d'où en intégrant et désignant par C, C′, C″ trois constantes arbitraires :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &y\,\frac{dz}{dt}-z\,\frac{dy}{dt}=C'',\\ &z\,\frac{dx}{dt}-x\,\frac{dz}{dt}=C',\\ &x\,\frac{dy}{dt}-y\,\frac{dx}{dt}=C.\end{aligned}\right.$$

On déduit des équations (5) la relation :

$$C''x+C'y+Cz=0.$$

Donc la courbe est plane et son plan passe par le centre fixe O. Ce résultat pouvait être prévu *à priori;* il est évident que le mobile ne doit pas sortir du plan qui contient le centre fixe et la vitesse initiale.

Si nous prenons le plan de la courbe décrite par le mobile pour plan des xy, nous aurons :

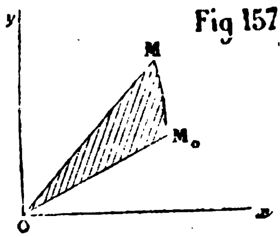


Fig 157

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X;\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=Y,$$

$$(6)\qquad x\,\frac{dy}{dt}-y\,\frac{dx}{dt}=c.$$

Soient r et θ les coordonnées polaires du point M, dont la position initiale est M_0, Σ l'aire du secteur M_0OM, on aura :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}; \quad r^2 d\theta = x\,dy - y\,dx.$$

L'équation (6) s'écrira :

(7) $$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c.$$

Or :

$$d\Sigma = \frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

donc (7) devient :

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{c}{2},$$

d'où :

(8) $$\Sigma = \frac{ct}{2}.$$

Donc l'aire décrite par le rayon vecteur est proportionnelle au temps.

75. Réciproquement. — *Si la trajectoire est plane, et si le rayon vecteur mené du mobile à un point fixe du plan décrit des aires proportionnelles au temps, la force motrice est constamment dirigée vers ce point fixe.*

On a en effet :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

$$\Sigma = \frac{ct}{2}.$$

On en déduit :

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{2},$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c,$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c,$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

et par conséquent :

$$xY - yX = 0; \quad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y},$$

dont la force est constamment dirigée vers le point O.

La proposition que nous venons de démontrer et sa réciproque constituent le principe des aires.

76. Expression de la vitesse, dans le mouvement produit par une force centrale. — On a d'une manière générale :

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}.$$

Dans le cas actuel on peut éliminer dt par l'équation (7); on trouve :

$$v^2 = c^2 \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2},$$

ce qui peut s'écrire :

$$(9) \qquad v^2 = c^2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \left(\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right\}.$$

La vitesse se trouve ainsi exprimée à l'aide de r et $\frac{dr}{d\theta}$.

Lorsque l'équation de la trajectoire sera donnée, sous la forme :

$$\frac{1}{r} = F(\theta),$$

on en conclura :

$$v^2 = c^2 \left\{ F^2(\theta) + F'^2(\theta) \right\}.$$

77. Expression de la constante c à l'aide des conditions initiales du mouvement. — Cherchons, d'une manière générale, les projections de v sur le rayon vecteur et une perpendiculaire au rayon vecteur. Soient :

$$MA = v, \quad AMB = \eta;$$

on a :

$$\cos\eta = \frac{dr}{ds}; \quad \sin\eta = \frac{rd\theta}{ds},$$

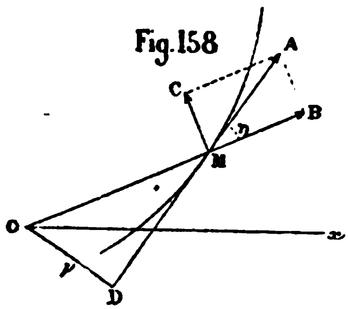
d'où :

$$v\cos\eta = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dr}{ds}; \quad v\sin\eta = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{rd\theta}{ds},$$

et par conséquent :

(10) $$v\cos\eta = \frac{dr}{dt}; \quad v\sin\eta = \frac{rd\theta}{dt}.$$

Fig. 158



Ces formules sont importantes. On peut les écrire en remplaçant dt par $\frac{r^2 d\theta}{c}$:

$$v\cos\eta = -c\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta},$$

(11) $$v\sin\eta = \frac{c}{r}.$$

La formule (11) peut être écrite autrement; soit p la distance du centre fixe à la tangente à la trajectoire au point M; on a :

(12) $$p = r\sin\eta.$$

Donc, (11) pourra s'écrire sous cette forme très simple :

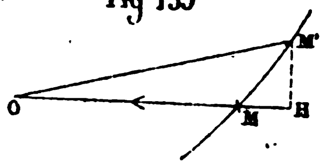
(13) $$vp = c.$$

Ainsi : *Dans tout mouvement produit par une force centrale, la vitesse en un point quelconque est en raison inverse de la distance du centre fixe à la tangente.*

78. Expression de la force accélératrice. — Supposons que la force qui agit sur le point M soit attractive, c'est à dire dirigée suivant MO; désignons son intensité par mR, m étant la masse du point matériel; R sera la force accélératrice. Appliquons le théorème du travail, nous aurons :

$$d \cdot \frac{mv^2}{2} = \text{trav. élém. de } m\text{R}.$$

Fig 159



Soit M′ un point de la trajectoire infiniment voisin de M, M′H perpendiculaire sur OM; le travail élémentaire de mR est :

$$-m\text{R} \times \text{MH} = -m\text{R}\,dr.$$

On aura donc :

(14) $$d.v^2 = -2\,\text{R}dr.$$

Si la force, au lieu d'être attractive, était répulsive, on trouverait :

$$d.v^2 = +2\,\text{R}dr;$$

de manière qu'on pourra appliquer dans tous les cas l'équation (14) en considérant R comme positif dans le cas de la force attractive, et négatif dans le cas de la force répulsive. En différentiant l'expression (9) de v^2 on trouve :

$$d.v^2 = c^2 \left\{ -\frac{2dr}{r^3} + \frac{2.d\cdot\frac{1}{r}}{d\theta} \times \frac{d^2\cdot\frac{1}{r}}{d\theta^2}\,d\theta \right\}.$$

On a pris θ pour variable indépendante; on peut encore écrire :

$$d.v^2 = -2\,\frac{c^2 dr}{r^2} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{d^2\cdot\frac{1}{r}}{d\theta^2} \right\}.$$

En reportant cette valeur dans (14), il viendra :

(15) $$\text{R} = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\cdot\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Lorsque l'équation de la trajectoire sera donnée sous la forme :

$$\frac{1}{r} = F(\theta),$$

on trouvera la force R immédiatement, par l'équation précédente.

Application de la théorie des forces centrales au mouvement des planètes.

79. Lois de Kepler. — Les lois du mouvement des planètes ont été déduites par Kepler des observations de Tycho-Brahé. Elles sont au nombre de trois :

1° *Les planètes se meuvent dans des courbes planes, et leurs rayons vecteurs décrivent autour du centre du Soleil des aires proportionnelles au temps.*

2° *Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers.*

3° *Les carrés des durées des révolutions sidérales des planètes autour du Soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.*

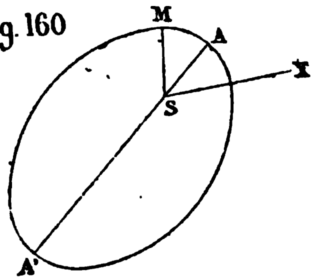
On peut déduire de ces lois la force qui produit le mouvement des planètes. En rapprochant le principe des aires de la première loi de Kepler, nous voyons que la force qui retient chaque planète dans son orbite est constamment dirigée vers le centre du Soleil.

Comme la trajectoire elliptique tourne toujours sa concavité vers le Soleil, il faut conclure que cette force est attractive, puisqu'elle éloigne toujours la planète de la tangente à son orbite, en tendant à la rapprocher du Soleil.

La seconde loi de Kepler va nous permettre de déterminer la loi suivant laquelle varie l'intensité de cette force, avec les diverses positions de la planète sur son orbite.

Soient AMA' l'orbite de la planète, S le centre du Soleil qui est l'un des foyers de l'ellipse, AA' le grand axe, A le point le plus rapproché de S, qu'on nomme le ***périhélie,*** A' le point le plus éloigné appelé *aphélie,* $2a$ le grand axe, $2c$ la distance focale, e l'excentricité égale au rapport $\frac{c}{a}$, SX l'axe polaire, ω l'angle ASX, r le rayon vecteur MS, v l'angle ASM, θ l'angle XSM; on sait que l'on a :

Fig. 160



$$r = \frac{p}{1 + e \cos v};$$

or :

$$v = \theta - \omega,$$

l'équation de l'orbite est donc :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos (\theta - \omega)},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e \cos (\theta - \omega)}{p}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{p},$$

et la formule (15) donne :

$$R = \frac{c^2}{p} \frac{1}{r^2}. \tag{16}$$

Or, pour une même planète, c et p sont des constantes: donc la force qui retient chaque planète dans son orbite, varie en raison inverse du carré de la distance de cette planète au centre du Soleil.

Soit T la durée de la révolution de la planète sur son orbite; c est le double de l'aire décrite pendant l'unité de temps, πab est l'aire décrite pendant le temps T; on a donc à cause de la loi des aires :

$$c = \frac{2\pi ab}{T}; \quad c^2 = 4\pi^2 \frac{a^2}{T^2} \cdot \frac{b^2}{a},$$

ou, à cause de :

$$\frac{b^2}{a} = p,$$

$$\text{(17)} \qquad \frac{c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

Si donc on met l'expression (16) de R sous la forme :

$$\text{(18)} \qquad R = \frac{\mu}{r^2},$$

où :

$$\mu = \frac{c^2}{p},$$

on aura :

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Pour une autre planète on aura de même :

$$\mu' = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2};$$

or la troisième loi de Kepler donne :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2},$$

donc :

$$\mu = \mu'.$$

Ainsi μ est le même pour toutes les planètes. Si nous nous rappelons que nous avons désigné par R la force qui agit sur la planète, divisée par la masse de cette planète, nous arrivons à ce résultat :

Une planète quelconque de masse m est sollicitée, dans *l'une quelconque de ses positions, vers le centre du Soleil, par une force dont l'expression est* $\frac{m\mu}{r^2}$, μ *étant le même pour toutes les planètes.*

Cette loi est démontrée pour une série de points compris entre des couronnes circulaires, ayant pour centre commun le Soleil, et pour rayons :

$$a(1-e), \quad a(1+e); \quad a'(1-e'), \quad a'(1+e')\ldots$$

La même chose a lieu pour une série de zones comprises entre Mars et Jupiter et correspondant aux astéroïdes. Nous sommes donc conduits à admettre que, partout où se trouvera une particule matérielle de masse m, elle sera soumise à l'action d'une force dirigée vers le centre du Soleil, et dont l'intensité sera $\frac{m\mu}{r^2}$.

Newton s'est proposé le problème inverse.

80. *Un point matériel de masse m est soumis constamment à l'action d'une force dirigée vers le centre du Soleil, et variant en raison inverse du carré de la distance ; trouver sa trajectoire.*

Pour résoudre ce problème, désignons par $\frac{m\mu}{r^2}$ l'intensité de la force ; on aura pour la force R rapportée à l'unité de masse :

(1) $$R = \frac{\mu}{r^2}.$$

On a en général :

$$R = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

On aura donc l'équation :

$$\frac{\mu}{c^2} = \frac{1}{r} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\theta^2},$$

ou :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu}{c^2}\right)}{d\theta^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu}{c^2}\right)=0,$$

d'où, en intégrant et désignant par e et α deux constantes arbitraires :

(2) $$\frac{1}{r}-\frac{\mu}{c^2}=\frac{\mu}{c^2}e\cos(\theta-\alpha),$$

(3) $$r=\frac{\frac{c^2}{\mu}}{1+e\cos(\theta-\alpha)}.$$

On peut toujours supposer $e > 0$, en augmentant au besoin α de 180°.

Ainsi, la trajectoire est une section conique ayant pour foyer le centre du Soleil.

81. Détermination des trois constantes c, e et α, à l'aide des données initiales θ_0, r_0, v_0, η_0; η_0 désigne l'angle que fait la vitesse initiale v_0 avec le rayon vecteur initial r_0. — L'équation (2) nous donne d'abord, pour l'instant initial :

(4) $$\frac{c^2}{\mu r_0}-1=e\cos(\theta_0-\alpha),$$

la formule :

$$r_0\cos\eta_0=-c\left(\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\theta}\right)_0,$$

en y remplaçant $\frac{1}{r}$ par sa valeur (2), nous donnera :

(5) $$v_0\cos\eta_0=\frac{\mu}{c}e\sin(\theta_0-\alpha).$$

Si dans (4) et (5) on remplace c par :

(6) $$c=r_0v_0\sin\eta_0,$$

il viendra :

$$(7) \qquad e \sin(\theta_0 - \alpha) = \frac{v_0^2}{\mu} r_0 \sin \eta_0 \cos \eta_0,$$

$$(8) \qquad e \cos(\theta_0 - \alpha) = \frac{v_0^2}{\mu} r_0 \sin^2 \eta - 1,$$

Les deux dernières formules déterminent sans ambiguité e et α; on en tire du reste :

$$e^2 - 1 = \frac{v_0^4}{\mu^2} r_0^2 \sin^2 \eta_0 - \frac{2v_0^2}{\mu} r_0 \sin^2 \eta_0,$$

$$(9) \qquad 1 - e^2 = \frac{v_0^2 r_0^2}{\mu^2} \sin^2 \eta_0 \left(\frac{2\mu}{r_0} - v_0^2\right),$$

ce qui montre que, si l'on a :

$v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$, la trajectoire sera une ellipse,

$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$, — parabole,

$v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$, — hyperbole.

Ainsi, la connaissance des orbites elliptiques des planètes nous a conduits à trouver l'expression de la force $R = \frac{\mu}{r^2}$; mais nous voyons qu'un point matériel soumis à l'action de cette force peut décrire autre chose qu'une ellipse, il peut décrire une hyperbole ou une parabole; cela dépend des conditions initiales. Il est remarquable que la nature de la section conique qui sera décrite par le mobile, ne dépende que de sa distance initiale au centre fixe et de sa vitesse initiale, et nullement de la direction de cette vitesse; en sorte que divers points matériels partis d'un même point M_0, avec des vitesses égales à v_0, mais dirigées d'une manière quelconque autour du point M_0, décrivent tous ou des ellipses, ou des hyperboles, ou des paraboles.

Remarque. — Des formules (9) (n° 76) et (3) (n° 80), on tire aisément, en désignant par a le demi-grand axe de l'orbite les relations suivantes :

$$\frac{c^2}{\mu} = a(1 - e^2),$$

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right);$$

en appliquant la dernière équation à l'instant initial, on en conclut :

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu};$$

cette expression est indépendante de η_0; de sorte que si divers points matériels partant d'une même position initiale M_0 avec la même vitesse v_0, telle que l'on ait :

$$v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0},$$

ces points décriront tous des ellipses ayant le même grand axe.

82. Orbites des comètes. — Kepler avait découvert les lois du mouvement des planètes, mais il ne savait absolument rien sur les orbites des comètes; c'est Newton qui trouva la nature de ces orbites. Voyant qu'en vertu de la loi d'attraction qu'il avait découverte, un corps peut décrire, autour du Soleil comme foyer, une ellipse très allongée ou même une parabole, Newton fut amené à penser que les comètes décrivaient des ellipses très allongées et que, comme les planètes, elles n'étaient pas lumineuses par elles-mêmes, mais tiraient leur lumière du Soleil. Il put ainsi expliquer les principales circonstances de leur mouvement, les phénomènes de leur apparition, de leur disparition, leur visibilité seulement dans le voisinage du périhélie et lorsqu'elles étaient suffisamment voisines de la Terre. Newton remarqua en outre que dans la région BC où la comète est visible, l'ellipse différait très peu d'une parabole ayant le même foyer S et le même sommet A. Il fut ainsi conduit à penser que les comètes pouvaient aussi décrire des paraboles, ayant le Soleil comme foyer; il trouva bientôt l'occasion d'appliquer ses idées sur la nature de la trajectoire décrite par les comètes. Le 14 novembre 1680, on aperçut une comète qui alla en se rapprochant très rapidement du Soleil, et se plongea dans ses rayons le 5 décembre; le 22 décembre suivant, on vit sortir des rayons du Soleil une magnifique comète; Newton montra que les arcs observés MN, M'N' appartenaient à une même parabole; les deux comètes n'en faisaient qu'une.

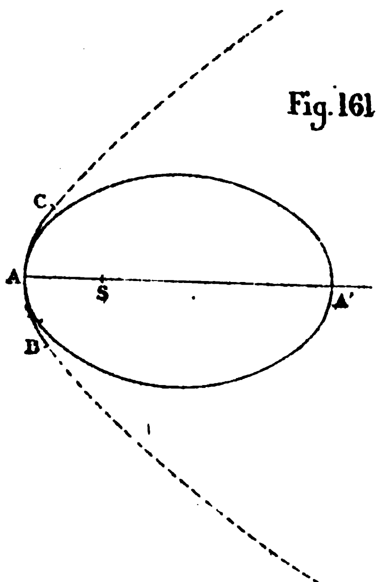


Fig. 161

Depuis Newton, on a calculé les trajectoires paraboliques d'un très grand nombre de comètes, et on a toujours trouvé un accord suffisant entre le calcul et les observations; dans un petit nombre de cas, on a trouvé des ellipses bien accusées; c'est le cas des comètes périodiques; pour ces comètes périodiques, on a pu vérifier la troisième loi de Kepler, c'est à dire que si a, T, a', T', a'', T''... représentent les grands axes et les durées des révolutions autour du Soleil de diverses comètes, on a :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2} = \frac{a''^3}{T''^2} \cdots = \mu,$$

μ ayant la même valeur que pour les planètes.

On en conclut qu'une comète périodique quelconque de masse m, dans une quelconque de ses positions, est sollicitée par une force dirigée vers le centre du Soleil et égale à $\frac{m\mu}{r^2}$.

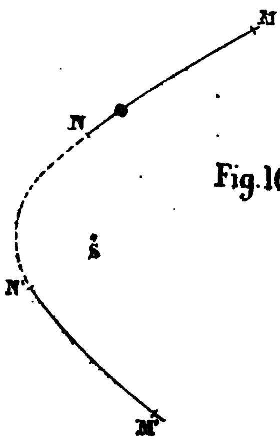


Fig. 162

Relativement aux comètes non périodiques, désignons par p, p', p''... les paramètres des orbites de plusieurs de ces comètes, par $\frac{c}{2}$, $\frac{c'}{2}$, $\frac{c''}{2}$... les aires décrites par les rayons vecteurs de ces comètes pendant l'unité de temps, les observations ont montré que l'on a :

$$\frac{c^2}{p} = \frac{c'^2}{p'} = \frac{c''^2}{p''} \cdots = \mu,$$

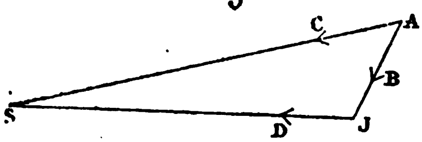
μ ayant encore la même valeur que pour les planètes. C'est cette loi qui pour les comètes non périodiques remplace la troisième loi de Kepler. Il en résulte que chacune de ces comètes est encore soumise à la force $\frac{m\mu}{r^2}$.

83. Vérifications du principe de la gravitation universelle. — Si l'on réfléchit que le système planétaire est sillonné dans tous les sens par d'innombrables comètes, on voit que l'on peut admettre que : partout où pénétrera dans le système solaire un point matériel de masse m, ce point éprouvera l'action d'une force dirigée vers le centre du Soleil, et ayant pour intensité $\frac{m\mu}{r^2}$, μ étant toujours le même quel que soit le point matériel considéré; c'est là ce que l'on appelle la force attractive du Soleil, et on peut dire encore :

Que le Soleil attire une particule matérielle quelconque proportionnellement à la masse de cette particule, et en raison inverse du carré de la distance de cette particule au centre du Soleil.

Si, des planètes, nous passons à leurs satellites, nous trouverons que, les lois de Kepler étant à peu près observées, dans le mouvement de ces satellites autour de leurs planètes, ces satellites doivent être attirés vers les centres de leurs planètes par des forces inversement proportionnelles aux carrés de leurs distances à ces centres. Prenons, par exemple, le système formé par Jupiter et ses quatre satellites; soient A un de ces satellites, m sa masse, M celle de Jupiter, J; dans chacune de ses positions le point A sera soumis à l'action d'une force AB dirigée vers le point J, et ayant pour intensité $\frac{m\mu'}{\overline{JA}^2}$, μ' ayant la même valeur pour les quatre satellites. Ainsi, Jupiter attire chacun de ses satellites proportionnellement à sa masse, et en raison inverse du carré de la distance de ce satellite au centre de la planète. Jupiter et son satellite sont aussi attirés vers le centre du Soleil S par des forces ayant pour intensités : $\frac{\mu M}{\overline{SJ}^2}$, $\frac{\mu m}{\overline{SA}^2}$. Les forces accélératrices correspondantes seront :

Fig. 163



$$\frac{\mu}{\overline{SJ}^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mu}{\overline{SA}^2};$$

comme JA est très petit devant JS, ces forces accélératrices seront à très peu près égales en intensité et en direction; ces forces auront donc seulement pour effet d'imprimer un mouvement de translation au système formé par Jupiter et ses satellites, de manière que les mouvements des satellites autour de la planète seront à peu près les mêmes que si la planète était immobile.

Ce que nous venons de dire pour Jupiter et ses quatre satellites, s'applique à Saturne et ses huit satellites, à Mars et ses deux satellites.

La Terre n'a qu'un satellite, la Lune, dont l'excentricité de l'orbite n'est pas très grande, puisqu'elle n'est guère que $\frac{1}{18}$; on montrera de même que la force accélératrice qui retient la Lune dans son orbite autour de la Terre est :

$$R = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \times \frac{1}{r^2};$$

mais, l'excentricité de l'orbite de la Lune étant faible, r ne varie pas beaucoup pour les diverses positions de la Lune; r ne diffère donc pas beaucoup de a, et on ne peut guère conclure que ceci, en faisant dans l'expression précédente $r = a$:

La Lune est attirée constamment vers le centre de la Terre par une force qui, divisée par la masse de la Lune, est égale en moyenne à :

$$R = \frac{4\pi^2 a}{T^2}.$$

Nous n'avons plus ici la vérification qui se présentait pour Mars, Jupiter, Saturne et Uranus, qui ont plusieurs satellites, et consistant en ce que $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ a la même valeur pour tous les satellites d'une même planète; mais nous allons indiquer une autre vérification, au moins aussi importante.

Rappelons d'abord que pour la Lune

$$T = 27^{j.}\ 7^{h.}\ 43^{m.} = 39343^{m.} = 39343 \times 60^{s.}$$

Appelons ρ le rayon terrestre; on a à peu près $a = 60\rho$; donc :

$$R = \frac{4\pi^2.60\rho}{60^2.39343^2} = \frac{4\pi^2\rho}{60.39343^2}.$$

Or :

$$2\pi\rho = 40\,000\,000^{m.},$$

donc :

$$R = \frac{2\pi.40\,000\,000}{60.39343^2} = 0^{m.},002706.$$

C'est l'accélération qui correspond à la force d'attraction exercée par la Terre sur la Lune. En admettant la loi de Newton, l'accélération de l'attraction de la Terre, sur un corps placé à sa surface, c'est à dire 60 fois plus près du centre de la Terre que la Lune, sera :

$$R \times 60^2 = 9^{m},74.$$

Or, l'accélération g due à l'action de la pesanteur est $9^{m},81$, nombre différant très peu du précédent. Pour arriver à ce résultat, nous avons supposé que l'orbite de la Lune était circulaire; nous avons négligé aussi certaines causes secondaires telles que la différence d'attraction du Soleil sur la Terre et la Lune, etc. Quand on tient compte de toutes ces circonstances, on trouve une identité rigoureuse entre les deux nombres. Il en résulte donc que :

La force qui retient la Lune dans son orbite, n'est autre chose que la pesanteur terrestre, affaiblie en raison inverse du carré de la distance.

Ainsi, la loi de variation de l'attraction qui, dans le cas de planètes accompagnées de plusieurs satellites, était prouvée principalement par la troisième loi de Kepler, est démontrée pour la Lune, par la comparaison de son mouvement avec celui des corps pesants à la surface de la Terre.

L'analogie nous porte évidemment à admettre la même loi pour les planètes qui, comme Mercure et Vénus, n'ont pas de satellites; nous sommes donc conduits à ce résultat :

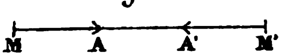
Chacun des corps de notre système planétaire exerce sur une particule matérielle une attraction proportionnelle à la masse de cette particule, et variant en raison inverse du carré de la distance.

L'attraction s'exerce sur toutes les parties des corps. Cela est prouvé dans le cas d'une planète particulière, la Terre. On démontre en effet que les corps tombent tous de la même manière dans le vide; on peut diviser un corps en un nombre quelconque de fragments, chacun de ces fragments tombe de la même manière que le corps entier; la pesanteur s'exerce donc sur chacun d'eux, et est pour chacun d'eux proportionnelle à sa masse; or, la pesanteur n'est qu'un cas particulier de l'attraction; nous sommes donc conduits à admettre que le Soleil attire également toutes les parties de matière ayant des masses égales. Les planètes, attirant leurs satellites, doivent attirer le Soleil, et toutes les parties du Soleil. Newton a été conduit ainsi à formuler la célèbre loi de la gravitation universelle.

Dans le système composé du Soleil, des planètes, de leurs satellites et des comètes :

Deux molécules quelconques s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de la distance.

Fig. 164



Soient M et M′ ces deux molécules, m et m' leurs masses, f un coefficient constant pour tout le système planétaire; M sera attiré vers M′ par la force MA, M′ vers M par la force M′A′; on aura :

$$\mathrm{MA} = \mathrm{M'A'} = \frac{f.mm'}{\overline{\mathrm{MM'}}^2}.$$

Applications de la théorie des forces centrales.

84. 1re QUESTION. — *Un point matériel décrit une courbe plane donnée, sous l'action d'une force constamment dirigée vers un centre fixe situé dans le plan de la courbe; on demande de trouver l'expression de la force; celle de la vitesse, et la loi du mouvement du point sur sa trajectoire.*

Soit R la force accélératrice, c la constante des aires; nous nous servirons des formules :

$$v^2 = c^2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \left(\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right\}, \tag{A}$$

$$R = \frac{c^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right\}, \tag{B}$$

$$d.v^2 = -2R\,dr. \tag{C}$$

On tirera de l'équation de la courbe donnée r en fonction de θ, ou θ en fonction de r, et on substituera dans les formules ci-dessus, qui donneront v^2 et R en fonction de θ ou de r. En substituant de même dans l'équation :

$$c\,dt = r^2 d\theta, \tag{D}$$

on aura θ ou r en fonction de t, par une quadrature.

On pourra déterminer la constante c, si on connaît la vitesse en un point de la courbe; on se servira pour cela de la formule :

$$c = rv \sin \eta. \tag{E}$$

85. EXEMPLE. — La courbe donnée a pour équation :

$$r^m = a^m \cos m\theta. \tag{1}$$

On en tire :

$$a^m \sin m\theta\, d\theta = -r^{m-1}\, dr,$$

$$a^m \sin . m\theta = \sqrt{a^{2m} - r^{2m}},$$

(2)
$$d\theta = \frac{-r^{m-1}\,dr}{\sqrt{a^{2m} - r^{2m}}},$$

et par conséquent :

$$\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{\sqrt{a^{2m} - r^{2m}}}{r^{m+1}}.$$

La formule (A) donnera donc :

$$v^2 = c^2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{a^{2m} - r^{2m}}{r^{2m+2}} \right\},$$

ou bien :

(3)
$$v^2 = \frac{c^2 a^{2m}}{r^{2m+2}},$$

(4)
$$v = \frac{c a^m}{r^{m+1}}.$$

En appliquant ensuite la formule (C) à l'expression (3) de v^2, il vient :

$$-(2m + 2) \frac{c^2 a^{2m}}{r^{2m+3}} dr = -2\mathrm{R}\,dr,$$

d'où :

(5)
$$\mathrm{R} = \frac{(m + 1)\, c^2 a^{2m}}{r^{2m+3}}.$$

Applications. — 1° $m = 1$. L'équation de la courbe est : $r = a \cos \theta$; c'est une circonférence sur laquelle se trouve le centre fixe; on trouve :

$$v = \frac{ca}{r^2}; \quad \mathrm{R} = \frac{2c^2 a^2}{r^5}.$$

La force est attractive.

2° $m = -2$. L'équation de la trajectoire est :

$$a^2 = r^2 \cos 2\theta = x^2 - y^2.$$

C'est une hyperbole équilatère dont le centre coïncide avec le centre fixe; on trouve :

$$v = \frac{c}{a^2} r; \quad R = \frac{-c^2}{a^4} r.$$

La force est répulsive et son intensité proportionnelle à la distance.

3° $m = 2$. L'équation de la trajectoire est :

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

C'est une lemniscate, dont le centre coïncide avec le centre fixe; on trouve :

$$v = \frac{ca^2}{r^2}; \quad R = \frac{3c^2 a^4}{r^7}.$$

La force est attractive.

86. 2ᵉ Question. — *Un point matériel décrit une trajectoire sous l'action d'une force dirigée constamment vers un centre fixe; l'expression de la vitesse en fonction de la distance r du mobile au centre fixe est connue. On demande de trouver l'expression de la force et l'équation de la trajectoire.*

On donne :

$$v = \varphi(r).$$

La formule (C) donnera :

$$(2) \qquad R = -\varphi(r)\,\varphi'(r).$$

La formule (A) donnera ensuite :

$$\varphi^2(r) - \frac{c^2}{r^2} = c^2 \frac{dr^2}{r^4 d\theta^2},$$

d'où :

$$(3) \qquad \pm\, d\theta = \frac{c\,dr}{r\sqrt{r^2\varphi^2(r) - c^2}}.$$

Le problème est ainsi ramené aux quadratures.

APPLICATION :

$$v = \frac{a}{r}; \quad \varphi(r) = \frac{a}{r},$$

$$R = \frac{a^2}{r^3}.$$

La force est attractive; la formule (3) donnera ensuite :

$$r = A e^{\theta \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}},$$

A désignant une constante arbitraire; on trouve une spirale logarithmique, ayant pour pôle le centre fixe. On aurait pu le voir immédiatement; la formule (E) donne en effet dans le cas actuel :

$$a \sin \eta = c,$$

d'où :

$$\eta = \text{constante}.$$

87. 3e QUESTION. — *Un point matériel décrit une trajectoire sous l'action d'une force dirigée constamment vers un centre fixe; l'intensité de cette force est une fonction connue de la distance du mobile au centre fixe; on demande de trouver l'expression de la vitesse et de l'équation de la trajectoire.*

Soit R l'intensité de la force divisée par la masse du mobile, on aura :

$$R = f(r),$$

f étant une fonction connue. Soient r_0, v_0, η_0 les valeurs des quantités r, v, η à l'instant initial, on aura :

$$c = r_0 v_0 \sin \eta_0$$

et l'équation différentielle de la trajectoire sera :

$$f(r) = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right); \tag{2}$$

son intégrale générale contiendra deux constantes arbitraires que l'on déterminera en écrivant que pour $\theta = \theta_0$:

$$r = r_0 \quad \text{et} \quad \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)_0 = \operatorname{tg} \eta_0$$

On aura ensuite :

$$v^2 = v_0^2 - 2 \int_{r_0}^{r} f(r)\, dr, \tag{3}$$

$$r^2 \frac{d\theta}{c} = dt \qquad ct = \int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta.$$

2° MÉTHODE. — On emploie la formule (3) dans laquelle on remplace v^2 par :

$$c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right],$$

on trouve ainsi :

$$\pm c \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} = \sqrt{v_0^2 - \frac{c^2}{r^2} - 2\int_{r_0}^{r} f(r)\, dr}.$$

Résolvant par rapport à $d\theta$ et intégrant, il viendra :

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \pm \frac{c\, dr}{r^2 \sqrt{v_0^2 - \frac{c^2}{r^2} - 2\int_{r_0}^{r} f(r)\, dr}}, \tag{4}$$

formule dans laquelle c est égal à :

$$r_0\, v_0 \sin \eta_0.$$

Si $\eta_0 < \frac{\pi}{2}$, on prendra au début le signe $+$, car r commence par croître;

Si $\eta_0 > \frac{\pi}{2}$, on prendra au début le signe $-$.

On est ainsi ramené aux quadratures, pour obtenir l'équation de la trajectoire.

La première méthode, dans laquelle on a à intégrer une équation du second ordre paraît plus compliquée; elle peut cependant conduire dans certains cas à des résultats plus simples; c'est ce qui arrive notamment dans le cas de $f(r) = \frac{\mu}{r^2}$ déjà examiné, et dans le cas de :

$$R = \frac{\mu}{r^3};$$

dans ce cas l'équation (2) devient :

$$\left(\frac{\mu}{c^2} - 1\right)\frac{1}{r} = \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\theta^2}.$$

On a d'ailleurs dans tous les cas :

$$v^2 - v_0^2 = \mu\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right).$$

Il y a lieu de considérer trois cas :

1° $$\frac{\mu}{c^2} - 1 = n^2,$$

alors :

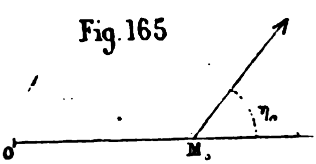
$$\frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\theta^2} = n^2 \frac{1}{r}.$$

L'intégrale générale de cette équation est, en désignant par A et B deux constantes :

(α) $$\frac{1}{r} = Ae^{n\theta} + Be^{-n\theta}.$$

Pour déterminer les constantes, faisons passer l'axe polaire par la position initiale du mobile; alors $\theta_0 = 0$.

Fig. 165



En faisant dans l'intégrale $\theta = 0$, on aura pour déterminer les constantes une première équation :

(β) $$\frac{1}{r_0} = A + B.$$

Prenons la dérivée par rapport à θ de l'équation (α), il viendra :

$$\frac{-dr}{r^2 d\theta} = n\,(\mathrm{A}e^{n\theta} - \mathrm{B}e^{-n\theta});$$

remplaçant dans cette équation r par r_0 et θ par zéro, il viendra, en ayant égard à la relation :

$$\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)_0 = \mathrm{tg}\,\eta_0,$$

$$(\gamma) \qquad \frac{-1}{r_0}\cot\eta_0 = n\,(\mathrm{A} - \mathrm{B}).$$

Les deux équations (β) et (γ) déterminent les constantes A et B. Remplaçant A et B par leurs valeurs dans (α), on aura l'équation de la trajectoire :

$$\frac{2r_0}{r} = e^{n\theta}\left(1 - \frac{\cot\eta_0}{n}\right) + e^{-n\theta}\left(1 + \frac{\cot\eta_0}{n}\right),$$

$$r = \frac{2r_0}{e^{n\theta} + e^{-n\theta} - \frac{1}{n}\cot\eta_0\,(e^{n\theta} - e^{-n\theta})}.$$

Il n'entrera qu'une exponentielle si :

$$\cot\eta_0 = \pm n.$$

Soit d'abord $\cot\eta_0 = +n$, nous aurons :

$$\frac{2r_0}{r} = 2e^{-n\theta},$$

$$r = r_0\,e^{n\theta}.$$

On a la spirale logarithmique.

Si $\cot\eta_0 = -n$, il viendra :

$$\frac{r_0}{r} = e^{n\theta},$$

$$r = r_0\,e^{-n\theta}.$$

On a encore une spirale logarithmique, mais dans ce cas le mobile se rapproche constamment de l'origine. Cherchons dans ce cas le temps nécessaire au mobile pour aller de M_0 au centre fixe. Pour cela nous remarquerons que l'on a :

$$r^2 d\theta = c\,dt,$$

ou

$$r_0^2 e^{-2n\theta} d\theta = c\,dt,$$

et en intégrant :

$$ct = \frac{r_0^2}{2n}(1 - e^{-2n\theta}).$$

Par conséquent le temps T nécessaire au mobile pour aller de M_0 en O, qui s'obtient en faisant $\theta = \infty$, est :

$$T = \frac{r_0^2}{2nc} = \frac{-r_0}{2v_0 \cos \eta_0}.$$

Ce temps est fini.

Supposons enfin $\eta_0 = \frac{\pi}{2}$. En introduisant cette hypothèse dans l'expression générale de r, on a :

$$r = \frac{2r_0}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}.$$

On a une spirale. — Cherchons encore le temps nécessaire au mobile pour aller de M_0 en O. Nous aurons :

$$c\,dt = r^2 d\theta = \frac{4r_0^2 e^{2n\theta} d\theta}{(e^{2n\theta} + 1)^2} = \frac{-4r_0^2}{2n} d \cdot \frac{1}{e^{2n\theta} + 1},$$

ou, en intégrant :

$$\frac{cnt}{2r_0^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + e^{2n\theta}},$$

$$cnt = r_0^2 \frac{e^{2n\theta} - 1}{e^{2n\theta} + 1}.$$

Le temps T est ici :

$$T = \frac{r_0^2}{cn}.$$

2^e cas : $\frac{\mu}{c^2} - 1 = -n^2$. On a alors :

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = -n^2,$$

ou, en intégrant :

$$\frac{1}{r} = \mathrm{A} \cos n\theta + \mathrm{B} \sin n\theta,$$

dont la dérivée par rapport à θ est :

$$\frac{-1}{r}\left(\frac{dr}{r d\theta}\right) = -n\mathrm{A} \sin . n\theta + n\mathrm{B} \cos n\theta.$$

Ces deux dernières équations nous serviront à déterminer les constantes A et B, en remarquant que pour $\theta = 0$, $r = r_0$; nous aurons :

$$\frac{1}{r_0} = \mathrm{A}, \qquad \frac{-1}{r_0} \operatorname{cotg} \eta_0 = n\mathrm{B},$$

et par conséquent :

$$\frac{r_0}{r} = \cos n\theta - \frac{1}{n} \operatorname{cotg} \eta_0 \sin n\theta.$$

Posons :

$$-\frac{1}{n} \operatorname{cotg.} \eta_0 = \operatorname{tg} n\lambda,$$

nous aurons :

$$\frac{r_0}{r} = \cos n\theta + \frac{\sin n\lambda \sin n\theta}{\cos n\lambda} = \frac{\cos n\,(\theta - \lambda)}{\cos n\lambda},$$

$$r = \frac{r_0 \cos n\lambda}{\cos n\,(\theta - \lambda)}.$$

Posons :

$$\theta = \lambda + \theta_1,$$

il viendra :

$$r = \frac{a}{\cos n\theta_1},$$

courbe facile à construire, et qui a une asymptote.

3[e] cas : $\frac{\mu}{c^2} - 1 = 0$.

On a alors :

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = 0,$$

$$\frac{1}{r} = A\theta + B, \qquad \frac{-1}{r}\frac{dr}{r\,d\theta} = A.$$

Les constantes sont faciles à déterminer. On a :

$$B = \frac{1}{r_0}, \ A = \frac{-1}{r_0} \operatorname{cotg} \gamma_0,$$

par conséquent :

$$\frac{r_0}{r} = 1 - \theta \operatorname{cotg} \gamma_0,$$

$$r = \frac{r_0}{1 - \theta \operatorname{cotg} \gamma_0},$$

équation d'une spirale hyperbolique.

88. Autre application. $R = \frac{\mu}{r^n}$.

On a :

$$\int_{r_0}^{r} R\,dr = \frac{\mu}{n-1}\left(\frac{1}{r_0^{\,n-1}} - \frac{1}{r^{n-1}}\right),$$

et par conséquent, en appliquant le principe des forces vives :

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2\mu}{(n-1)\,r_0^{\,n-1}} + \frac{2\mu}{n-1}\frac{1}{r^{n-1}} = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right].$$

Posons $\frac{1}{r} = z$, il viendra :

$$\theta - \theta_0 = c\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{n-1} z_0^{\,n-1} - c^2 z^2 + \frac{2\mu}{n-1} z^{n-1}}},$$

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2 \sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{n-1} z_0^{n-1} - c^2 z^2 + \frac{2\mu}{n-1} z^{n-1}}}.$$

On peut effectuer complètement les intégrations lorsque n est égal à l'un des nombres : 2, 3, — 1. Nous allons traiter d'une manière particulière le cas de $n = -1$, autrement dit nous allons nous proposer de trouver le mouvement d'un point matériel attiré ou repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance.

En désignant par $n^2 r$ la force attractive rapportée à l'unité de masse, on a les équations :

$$(1) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = -n^2 x; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -n^2 y.$$

On peut intégrer séparément ces équations, ce qui donne, en désignant par A, B, C, D quatre constantes arbitraires :

$$x = A \cos nt + B \sin nt,$$

$$y = C \cos nt + D \sin nt.$$

Détermination des constantes. — Soient x_0, O les coordonnées initiales du mobile, $v_0 \cos \alpha_0$ et $v_0 \sin \alpha_0$ les projections de la vitesse initiale sur les axes. On aura :

$$A = x_0; \quad B = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{n},$$

$$C = 0; \quad D = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{n},$$

et par suite :

$$x = x_0 \cos nt + \frac{v_0 \cos \alpha_0}{n} \sin nt,$$

$$y = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{n} \sin nt.$$

On tire de là :

$$\cos nt = \frac{x \sin \alpha_0 - y \cos \alpha_0}{x_0 \sin \alpha_0},$$

$$\sin nt = \frac{ny}{v_0 \sin \alpha_0},$$

et par conséquent l'équation de la trajectoire est :

$$(4) \qquad \frac{n^2 y^2}{v_0^2} + \frac{(x \sin \alpha_0 - y \cos \alpha_0)^2}{x_0^2} = \sin^2 \alpha_0,$$

équation d'une ellipse dont le point fixe O est le centre et dont les deux droites

$$y = 0, \quad y = x \operatorname{tg} \alpha_0$$

constituent un système de diamètres conjugués. Ces droites sont le rayon vecteur initial et une parallèle à la vitesse initiale.

La durée $T = \frac{2\pi}{n}$ de la révolution du mobile sur l'ellipse qu'il parcourt est entièrement indépendante de sa vitesse initiale.

2° **Cas de la répulsion.** $R = n^2 r$. On a alors :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = n^2 x; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = n^2 y,$$

$$(5) \qquad x = Ae^{nt} + Be^{-nt}; \quad y = Ce^{nt} + De^{-nt}.$$

On déterminera les constantes A, B, C, D à l'aide des conditions initiales, on tirera ensuite de (5), en y regardant e^{nt} et e^{-nt} comme inconnues, des expressions de la forme :

$$e^{nt} = Lx + My,$$
$$e^{-nt} = L'x + M'y;$$

en multipliant ces deux expressions, on trouvera l'équation de la trajectoire :

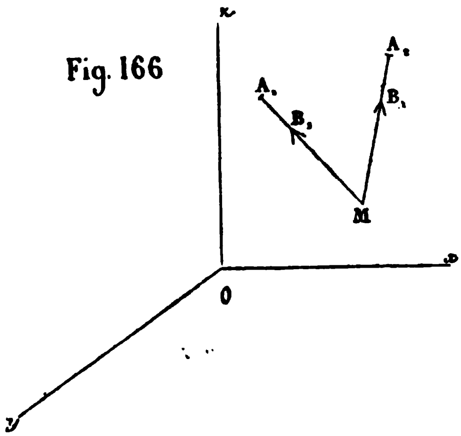
$$1 = (Lx + My)(L'x + M'y),$$

équation d'une hyperbole dont les asymptotes sont les droites :

$$Lx + My = 0; \quad L'x + M'y = 0.$$

Mouvement d'un point matériel attiré proportionnellement à la distance par un nombre quelconque de centres fixes.

Fig. 166



Soient MB_1 la force produite par le centre A_1, dont les coordonnées sont a_1, b_1, c_1; MB_2 la force produite par le centre A_2, ...; m_1, m_2,... les masses de ces centres. Nous avons par hypothèse :

$$MB_1 = \mu . m_1 . MA_1,$$
$$MB_2 = \mu . m_2 . MA_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nous aurons pour la projection de la force MB_1 sur Ox :

$$\mu m_1 \, MA_1 \times \frac{a_1 - x}{MA_1} = \mu . m_1 . (a_1 - x).$$

Donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu}{m} \Sigma m_1 (a_1 - x) = \frac{\mu}{m} \Sigma m_1 a_1 - \frac{\mu}{m} x \Sigma m_1.$$

Soient A_1, B_1, C_1 les coordonnées du centre de gravité G des centres fixes, on aura :

$$\Sigma m_1 a_1 = A_1 \Sigma m_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu}{m} \Sigma m_1 (A_1 - x),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\mu}{m} \Sigma m_1 (B_1 - y),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\mu}{m} \Sigma m_1 (C_1 - z),$$

Tout se passe comme si le point M était attiré proportionnellement à la distance par le centre fixe G affecté de la masse $M = \Sigma m_1$. Donc le mobile décrira une ellipse ayant ce point pour centre.

NOTES

DE Mr DARBOUX

NOTE I

SUR LA COMPOSITION DES FORCES EN STATIQUE.

Dans un Mémoire de 1726, qui fait partie du tome I des *Commentaires de Saint-Pétersbourg*, Daniel Bernoulli examine la démonstration par laquelle Newton et Varignon ont déduit la loi de la composition des forces de celle des mouvements qu'elles produisent. Il critique cette démonstration et lui reproche, en particulier, de s'appuyer sur des vérités contingentes, c'est à dire empruntées à l'expérience : « *Nihil in illa demonstratione*, dit-il, *ut falsum rejicio, sed quædam ut obscura, quædam ut non necessario vera.* » Et, après un examen détaillé des objections qu'on peut faire, suivant lui, à la marche suivie par Newton, il passe à son objet principal, qui est de donner une démonstration *géométrique* de la composition des forces.

Sans donner une analyse complète des remarques de Bernoulli, on peut cependant observer que sa démonstration n'est pas aussi géométrique qu'il le suppose. Comme celle de Newton, elle repose sur des principes empruntés à l'expérience et particulièrement sur la notion même de résultante. Il est vrai qu'elle n'emploie pas la composition des mouvements; mais, en revanche, elle ne peut pas être étendue, sans explication nouvelle, au cas où les forces agissent sur un point en mouvement (1).

Quoi qu'il en soit, la marche suivie par D. Bernoulli a eu de

(1) En supposant, en effet, la résultante trouvée en Statique, voici comment on peut raisonner dans le cas où le point est en mouvement: Étant données deux forces P, Q agissant sur un point matériel A, introduisons deux forces — P, — Q et la force R qui

nombreux imitateurs. La Statique est souvent enseignée seule ou indépendamment de la Dynamique, et elle repose tout entière sur la loi de la composition des forces. Il était donc naturel de rechercher une démonstration de cette loi, uniquement déduite de la considération de l'équilibre, et c'est ce que n'ont pas manqué de faire de nombreux géomètres.

Pour tout ce qui concerne la comparaison de la méthode de Bernoulli avec celle de Newton, ainsi que les démonstrations analogues à celles de Bernoulli parues avant Lagrange, on pourra lire la Notice sur la loi du parallélogramme placée au commencement de la *Mécanique Analytique*. Parmi les divers écrits cités par Lagrange, nous signalerons surtout le Mémoire de d'Alembert, dans le tome I des *Opuscules Mathématiques*, où la démonstration, un peu longue, de Bernoulli se trouve ramenée au dernier degré de simplicité.

Il est aujourd'hui peu de Recueils scientifiques où l'on ne rencontre au moins une démonstration de la règle du parallélogramme. Le premier chapitre de la *Mécanique Céleste* en contient une qui repose sur l'emploi des infiniment petits. Poisson, dans sa *Mécanique Rationnelle*, en donne une autre qui conduit à une équation fonctionnelle. On trouve encore, dans la dernière édition de la *Statique* de Monge, une démonstration due à Cauchy et reproduite dans le tome I des *Exercices de Mathématiques*, 1826. Möbius en fait connaître une autre, fort curieuse, dans sa *Statique*. Celle que contiennent nos Traités de Mécanique est très simple, mais elle repose sur un principe de la statique du corps solide; on l'attribue, je crois, à Ampère. Enfin, pour borner là notre énumération, citons encore, dans le *Journal de Liouville*, tome I, la démonstration de M. Aimé, qui se rapproche de celle de D. Bernoulli et n'offre aucun avantage sur celle-ci, telle qu'elle a été présentée par d'Alembert.

Ces différentes démonstrations reposent sur des principes qui leur sont communs, et sur d'autres qui sont propres à chacune d'elles. C'est ainsi que les unes admettent que la direction et la grandeur de la

leur ferait équilibre. L'état, c'est à dire le mouvement du point, ne sera pas changé. Supprimons les groupes $P - P$, $Q - Q$; il reste la force R, qui peut, par conséquent, remplacer les forces P, Q. Mais ce principe, qu'on peut ajouter ou supprimer sur un point matériel en mouvement des forces qui se feraient équilibre sur le point au repos, n'est au fond qu'un cas particulier de la loi de la composition des mouvements produits par les forces.

résultante varient d'une manière continue avec la grandeur et la direction des composantes; d'autres supposent seulement que la résultante est dirigée à l'intérieur de l'angle formé par les composantes, etc.

Je me suis proposé de reprendre l'étude de cette question en la traitant comme un problème de pure Géométrie, ce qu'elle est au fond; et en tâchant de conduire la démonstration de manière à bien mettre en évidence quelles sont les hypothèses qu'on peut rejeter et celles qu'il est nécessaire d'adopter. Je commencerai donc en admettant les hypothèses communes à toutes les démonstrations et en me proposant le problème de Géométrie suivant :

Étant données n lignes OA_1, OA_2, ..., OA_n, ayant leur origine en un point O, déterminer pour ces lignes une loi de composition d'après les conditions suivantes :

I. La résultante totale, unique et déterminée, demeurera invariable quand, à quelques-unes de ces lignes, on substituera leur résultante partielle. Elle sera indépendante de l'ordre dans lequel auront été faites les compositions partielles.

II. Elle sera aussi indépendante de l'orientation du système dans l'espace, c'est à dire qu'elle se déplacera en formant avec les lignes un système invariable quand on leur imprimera un déplacement quelconque autour du point O.

Dans cette manière de poser la question, il est nécessaire de bien prouver les points qui paraîtraient le plus évidents s'il s'agissait réellement de forces; la conclusion aura d'autant plus de valeur qu'on aura moins admis de conditions pour l'obtenir.

Il résulte d'abord des deux hypothèses admises que la résultante OC de deux lignes égales et directement opposées est nulle. En effet, le système des lignes OA, OB ne change pas : 1° par une rotation autour de AOB d'un angle quelconque; 2° par une rotation de 180 degrés autour d'un axe Ox perpendiculaire à AOB, qui amène OA sur OB et OB sur OA. Ces rotations ne devraient donc pas changer la direction de la résultante, ce qui est impossible. Il faut donc qu'elle soit nulle.

Réciproquement la résultante de deux lignes OA, OB n'est nulle que si elles sont égales et directement opposées. Supposons, en effet, que deux lignes OA, OB aient une résultante nulle. Considérons le système des trois lignes OA, OB et OB′ égale et directement opposée à OB. La résultante de ces trois lignes est OA; mais, comme la résultante de OA et de OB est nulle, elle est aussi OB′. Comme, d'après la condition I, il ne peut y avoir deux résultantes différentes, il faut que OB′ soit égale et parallèle à OA et de même sens qu'elle, c'est à dire qu'il faut que OA, OB soient égales et de sens opposés.

En second lieu, la résultante de deux lignes OA, OB est nécessairement dirigée dans leur plan, car soit OC cette résultante : deux lignes OA′, OB′ égales et opposées à OA, OB doivent avoir pour résultante OC′ égale et opposée à OC. En effet, la résultante de OA, OB, OA′, OB′ est nulle; il faut donc qu'il en soit de même de la résultante de OC et de OC′ et, par conséquent, que OC et OC′ soient égales et opposées.

Or, si l'on fait tourner OA, OB de 180 degrés dans leur plan, elles viennent s'appliquer sur OA′, OB′; il faut donc que OC vienne s'appliquer sur son prolongement OC′, ce qui exige que OC soit dans le plan BOA. Ainsi :

La résultante de deux lignes est contenue dans le plan de ces deux lignes.

Ce point étant admis, soient P, Q deux lignes appliquées au point O; adjoignons-leur une troisième ligne quelconque R non située dans leur plan et cherchons la résultante S de ces trois lignes. Soient R′ la résultante de P et Q, Q′ celle de P et R, P′ celle de Q et de R. On aura S en composant soit P et P′, soit Q et Q′, soit R et R′. D'où il suit que les plans de P et P′, de Q et Q′, de R et R′ doivent se couper suivant une même droite. On aura donc, d'après un théorème connu relatif à l'angle trièdre,

$$\frac{\sin R'OP}{\sin R'OQ}\,\frac{\sin P'OQ}{\sin P'OR}\,\frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP} = -1,$$

$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'} = \frac{\sin P'OR}{\sin P'OQ} \cdot \frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP}.$$

Supposons OR perpendiculaire au plan POQ. Le rapport $\frac{\sin P'OR}{\sin P'OQ}$ ne dépend que des forces R et Q et de leur angle qui est supposé droit. Il est donc une fonction de R et de Q, $\varphi(R, Q)$. De même le rapport semblable $\dfrac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP}$ est la même fonction de R et de P. On a donc :

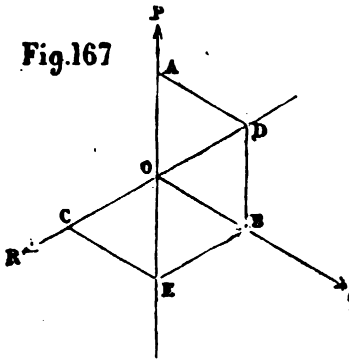
$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'} = \frac{\varphi(R, Q)}{\varphi(R, P)},$$

ou, en donnant à R une valeur numérique 1, par exemple,

$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'} = \frac{\varphi(Q)}{\varphi(P)}.$$

Cette équation exprime que, si l'on porte la longueur φ (P) sur P dans le sens de P ou en sens contraire, suivant que φ (P) est positif ou négatif, et de même φ(Q) sur Q, la résultante est *en direction* la diagonale du parallélogramme construit sur φ (P) et φ (Q).

Fig. 167



J'ajoute que la diagonale sera, en grandeur, égale à la fonction φ (R') de la résultante R'.

Soient, en effet, (*fig. 167*) P, Q, R trois lignes dont la résultante soit nulle. Chacune sera égale et opposée à la résultante des deux autres. Prenons :

$$OA = \varphi(P), \quad OB = \varphi(Q), \quad OC = \varphi(R);$$

OP sera, en direction, la diagonale du parallélogramme construit sur OB, OC ; OR la diagonale du parallélogramme construit sur OA, OB. On a donc :

$$OD = BE = OC, \quad \text{ou} \quad OD = \varphi(R).$$

Comme R est la grandeur de la résultante des deux lignes P, Q, on voit que la diagonale du parallélogramme construit sur φ(P), φ(Q) a pour grandeur φ (R), comme nous l'avions annoncé.

De tout ce qui précède résulte la loi de composition suivante :

Étant données n lignes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, la loi de composition la plus générale satisfaisant aux conditions I, II sera la suivante. On choisira une fonction $\varphi(x)$ et l'on portera des longueurs égales à $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n)$ respectivement sur $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dans un sens déterminé par le signe de chacune de ces fonctions. On composera toutes ces lignes d'après les règles du polygone des forces, c'est à dire en les portant successivement les unes à la suite des autres; le côté qui fermera ce polygone donnera la direction de la résultante R, et il sera égal en grandeur à $\varphi(\mathrm{R})$.

Ajoutons que, pour que R soit bien connu, il faut qu'on puisse le déduire sans ambiguïté de la valeur de $\varphi(\mathrm{R})$. Remarquons aussi que la loi de composition ne sera pas changée si, à la place de $\varphi(x)$, on prend $m\varphi(x)$, m étant un nombre quelconque.

Les deux conditions I, II ne suffisent donc pas à nous conduire seules aux lois de la composition des forces. Nous ajouterons l'hypothèse suivante, qui est admise dans toutes les démonstrations de la loi du parallélogramme et sur laquelle repose la définition même de la grandeur d'une force.

III. La loi de la composition des lignes doit se réduire à celle de l'addition algébrique pour des lignes de même direction.

Voyons les conséquences de cette hypothèse sur la forme de la fonction $\varphi(\mathrm{P})$.

Considérons deux lignes quelconques P, Q, de même direction et de même sens, et d'autres lignes quelconques S, T, ... Dans le polygone des lignes résultant de la composition figurent deux côtés parallèles, $\varphi(\mathrm{P})$ et $\varphi(\mathrm{Q})$. Mais, si l'on compose P, Q en une autre ligne $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$, les deux côtés $\varphi(\mathrm{P})$, $\varphi(\mathrm{Q})$ seront remplacés par un seul $\varphi(\mathrm{P}+\mathrm{Q})$, qui leur sera parallèle. Comme la résultante totale ne doit pas être changée, il faut que l'on ait :

$$\varphi(\mathrm{P}+\mathrm{Q})=\varphi(\mathrm{P})+\varphi(\mathrm{Q}).$$

Ainsi cette équation fonctionnelle est la traduction de notre nouvelle condition III.

On sait résoudre l'équation précédente en supposant $\varphi(\mathrm{P})$ continue. La fonction qu'on obtient alors est :

$$\varphi(\mathrm{P})=a\mathrm{P}.$$

Mais nous allons montrer que, en supposant $\varphi(\mathrm{P})$ simplement positif, on arrive au même résultat.

En effet, de l'équation :

$$\varphi(\mathrm{P}+\mathrm{Q})-\varphi(\mathrm{P})=\varphi(\mathrm{Q}),$$

on déduit que la fonction $\varphi(x)$, si elle est positive, est toujours croissante. D'ailleurs c'est une conséquence bien connue de l'équation fonctionnelle, que l'on a :

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\varphi(1),$$

c'est à dire $\varphi(x) = ax$, pour toutes les valeurs commensurables de x.

La fonction étant croissante, la même formule conviendra aussi évidemment, sans qu'il soit nécessaire de la supposer continue, pour les valeurs incommensurables de x [1].

D'après une remarque faite plus haut, on peut diviser par a et prendre $\varphi(x) = x$, ce qui conduit à la loi du parallélogramme.

Ainsi, pour obtenir cette loi, il faut ajouter aux trois hypothèses déjà faites l'une des deux suivantes :

IV. φ (P) est toujours positif, c'est à dire φ (P) et φ (Q) sont de même signe.

IV_a. φ (P) est une fonction continue.

Examinons la signification mécanique de ces deux hypothèses.

IV. Si φ (P) est toujours de même signe, la résultante des deux forces P, Q sera toujours dirigée dans leur angle.

IV_a. Si φ (P) est continue, la direction de la résultante et sa grandeur seront des fonctions continues des deux forces.

Ainsi il faut admettre l'une ou l'autre des deux hypothèses qui précèdent pour obtenir la loi connue de la composition des forces.

Aucune démonstration n'échappe aux conditions que nous avons posées ici. Celle de Bernoulli modifiée par d'Alembert paraît encore la meilleure au point de vue du moindre nombre des hypothèses faites, et aussi parce qu'elle n'emploie que des constructions planes. Il nous semble que, en écartant des distinctions tout à fait déplacées dans un enseignement, on pourrait tirer des lignes qui précèdent un moyen assez simple d'obtenir en Statique la loi de la composition des forces.

(1) Car, soit x une incommensurable comprise entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$, on aura :

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) < \varphi(x) < \varphi\left(\frac{p+1}{q}\right), \quad \text{ou} \quad a\frac{p}{q} < \varphi(x) < a\left(\frac{p+1}{q}\right);$$

$\varphi(x)$ sera donc comprise entre deux grandeurs ayant pour limite ax.

NOTE II

RELATIVE A DEUX THÉORÈMES DE LAGRANGE SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ.

Une intéressante Communication de M. Laisant à la Société Mathématique de France (¹) a trait à deux remarquables théorèmes qui, depuis Lagrange, ont été étudiés par différents géomètres. Poinsot les a donnés dans sa *Statique*, et Jacobi, après les avoir établis dans sa *Mécanique Analytique* (p. 22), en fait un usage important dans les considérations qu'il développe sur la stabilité du système du monde.

J'indiquerai ici comment j'ai démontré, dans mon enseignement, les propositions ou plutôt la proposition de Lagrange (car le premier théorème de Lagrange n'est qu'un cas particulier du second). En développant une remarque de Leibnitz, on est conduit, en même temps qu'au théorème de Lagrange, à un nouveau mode d'exposition de la théorie du centre des forces parallèles.

On sait que, étant données trois forces concourantes qui se font équilibre, leur point commun d'application est le centre de gravité du triangle formé par leurs extrémités. Leibnitz a remarqué plus généralement que, si n forces concourantes se font équilibre, leur point commun d'application est le centre de gravité de n points de masses égales placés à leurs extrémités. C'est cette remarque, un peu généralisée, qui nous servira de point de départ. Nous allons d'abord indiquer quelques définitions qui serviront à abréger les raisonnements.

Étant donnée une force, nous la désignerons toujours en commençant par son point d'application. Ainsi, la force OA aura son point d'application en O et son extrémité en A. Comme nous n'examinerons que des forces concourantes, il n'y a aucun inconvénient à dire qu'une

(¹) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. V, p. 193.

force OA est la résultante de deux forces PB, QC. Cela signifiera que si les trois forces étaient déplacées parallèlement à elles-mêmes et ramenées à avoir le même point d'application, la première deviendrait la résultante des deux autres. Ainsi, en tenant compte des deux conventions précédentes, nous pourrons dire, étant donné un triangle ABC, que AB est la résultante de AC et de CB.

Étant donnée une force OA, nous dirons que nous la multiplions par un nombre positif ou négatif m, quand nous lui substituerons une force OB de même direction et de même point d'application, égale à la première multipliée par la valeur absolue de m, de même sens si m est positif, de sens contraire si m est négatif. Il est clair que la force $(m_1 + m_2)$ OA est la résultante de $m_1\overline{OA}$ et de $m_2\overline{OA}$, et, d'autre part, que, si une force F est la résultante de deux autres F', F'', mF sera de même la résultante de mF', mF''.

Ces définitions étant admises, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Considérons p points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ affectés de coefficients positifs ou négatifs $m_1, m_2, \ldots, m_p$ dont la somme n'est pas nulle; O désignant un point quelconque de l'espace, la résultante des forces $m_1\overline{OA_1}, m_2\overline{OA_2}, \ldots, m_p\overline{OA_p}$ ira passer par un point fixe C et sera égale à $M.\overline{OC}$, M désignant la somme $m_1 + m_2 + \ldots + m_p$.*

Dans le cas exceptionnel où la somme M est nulle, la résultante conservera une grandeur et une direction invariables quand le point O se déplacera; en particulier, si elle est nulle pour une position du point O, elle sera nulle pour toutes les autres.

Soit, en effet, OR la résultante des forces $m_i\overline{OA_i}$. Cherchons la résultante O'S quand le point O est remplacé par le point O' et les forces $m_i\overline{OA_i}$ par $m_i\overline{O'A_i}$. La force $O'A_i$ peut être regardée comme la résultante de O'O et de OA_i. De même, $m_i O'A_i$ peut être regardée comme la résultante de $m_i\overline{O'O}$ et de $m_i\overline{OA_i}$. On obtiendra donc la résultante O'S : 1° en composant toutes les forces $m_i OA_i$, ce qui donnera OR; 2° en composant toutes les forces $m_i\overline{O'O}$, ce qui donnera $M.\overline{O'O}$; 3° en composant les deux résultantes partielles

$$\text{OR} \quad \text{et} \quad M.\overline{O'O}. \tag{1}$$

Supposons d'abord que M ne soit pas nul, et déterminons sur OR un point C par la condition :

$$OR = M.\overline{OC}.$$

Alors O′S, étant la résultante de $M.\overline{OC}$ et de $M.\overline{O'O}$, sera évidemment égale à $M.\overline{O'C}$. Elle passera donc toujours par le point C, et sera égale à $M.\overline{O'C}$, ce qui démontre la première partie du théorème, relative au cas où M n'est pas nul.

Supposons maintenant que M soit nul. Alors les deux résultantes partielles (1) se réduiront à une seule. O′S sera égale et parallèle à OR, ce qui achève de démontrer la proposition.

Il est évident que le point C, par lequel va passer la résultante quand M n'est pas nul, ne dépend que des rapports mutuels des coefficients m_i. En mettant à profit cette remarque, considérons les forces $m_1\frac{\overline{OA_1}}{k}$, $m_2\frac{\overline{OA_2}}{k}$, ..., $m_p\frac{\overline{OA_p}}{k}$; elles auront pour résultante $\frac{M}{k}$ OC.

Prenons $k = OA_1$, et supposons que le point O s'éloigne indéfiniment. Alors $\frac{\overline{OA_2}}{k}$, ..., $\frac{\overline{OA_p}}{k}$ auront pour limite l'unité. Les différentes forces $\frac{m_i\overline{OA_i}}{k}$, que l'on peut supposer transportées parallèlement à elles-mêmes de manière que leurs points d'application coïncident avec les points A_i, finiront par devenir parallèles et auront pour grandeurs les valeurs absolues de m_1, m_2, ..., m_p, deux forces correspondantes à des coefficients de signes contraires ayant des sens opposés. Quant à la résultante qui passe par C et a pour valeur $\frac{M.\overline{OC}}{k}$, on peut transporter son point d'application en C, et elle aura pour valeur limite M. Ainsi la résultante des forces parallèles passera par un point fixe et sera égale à leur somme algébrique. On reconnaît la proposition fondamentale de la théorie des forces parallèles ; le point C est le centre des forces parallèles considérées, ou, si l'on veut, le centre de gravité des masses m_i appliquées aux points A_i, et l'on voit que la notion et les propriétés de ce centre se déduisent comme cas particuliers du théorème I.

Ces remarques préliminaires étant faites, nous obtiendrons sans peine le théorème de Lagrange et une proposition nouvelle. Nous avons appelé OR la résultante des forces $m_i\overline{OA_i}$. En employant la formule connue qui donne la résultante en fonction des composantes, nous aurons :

$$(2) \qquad \overline{OR}^2 = \Sigma m_i^2 \overline{OA_i}^2 - 2\Sigma m_i m_k \overline{OA_i}\,\overline{OA_k} \cos \widehat{A_i O A_k}.$$

Or, dans le triangle $A_i O A_k$, on a :

$$2 OA_i\, OA_k \cos \widehat{A_i O A_k} = \overline{OA_i}^2 + \overline{OA_k}^2 - \overline{A_i A_k}^2.$$

Servons-nous de cette relation pour éliminer les cosinus; la formule (2) deviendra :

$$(3) \qquad \overline{OR}^2 = M\Sigma m_i \overline{OA_i}^2 - \Sigma\Sigma m_i m_k \overline{A_i A_k}^2.$$

Si l'on remplace OR par $M.\overline{OC}$, on aura précisément la proposition de Lagrange.

Sans insister sur cette proposition bien connue, je vais examiner spécialement le cas où l'on a $M = 0$. Alors nous savons que la résultante OR est constante en grandeur et en direction, et, en effet, la formule (3) nous donne pour cette résultante la valeur :

$$(4) \qquad \overline{OR}^2 = -\Sigma\Sigma\, m_i m_k \overline{A_i A_k}^2,$$

indépendante de la position du point O.

Supposons maintenant que, considérant un certain nombre des points A_i, on les supprime et on les remplace par un seul point, leur centre de gravité, affecté d'une masse égale à la somme de leurs masses, je dis que la résultante ne sera pas changée. En effet, cela revient à supprimer, par exemple, deux forces $m_1\overline{OA_1}$, $m_2\overline{OA_2}$, et à ajouter la force $(m_1 + m_2)\, OA'$ dirigée vers le centre de gravité A' des points A_1, A_2. Or, d'après le théorème I, cette dernière force est la résultante des deux premières. L'opération indiquée a donc pour effet de substituer à deux ou à plusieurs composantes leur résultante partielle, ce qui ne changera pas la résultante totale.

Donc, dans l'équation (4), le second membre conservera sa valeur quand on substituera aux points A_i les nouveaux points, en nombre moindre, que l'on aura déduits des premiers par des compositions partielles. Nous sommes ainsi conduits à la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Considérons un système de points dont la masse totale est nulle. Remplaçons un ou plusieurs groupes de ces points par leurs centres de gravité, en affectant à ces centres la masse totale des points qu'ils remplacent. Pour un quelconque des systèmes de points ainsi obtenus, la somme*

$$\Sigma\Sigma\, m_i m_k\, \overline{A_i A_k}^2$$

conservera une valeur constante, négative ou nulle.

Il serait facile de prouver que ce théorème peut donner celui de Lagrange; je me contenterai de faire remarquer que l'on peut toujours réduire à deux le nombre total des points du système, par exemple, en prenant le centre de gravité de tous les points à masse positive d'une part, et, d'autre part, celui des points à masse négative. Soient B, B' les deux points ainsi obtenus de masses μ, $-\mu$. La somme précédente sera réduite à un seul terme :

$$-\mu^2.\overline{BB'}^2,$$

ce qui permettra de la construire géométriquement. Du reste, les points B, B' donnent aussi la direction de la résultante OR définie dans le théorème I; car, si le point O vient en B', cette résultante se réduit à la seule composante $\mu\overline{B'B}$, et, comme elle est constante en grandeur et en direction, elle sera toujours parallèle à BB' et égale à $\mu.\overline{B'B}$.

Le théorème II peut conduire à de nombreuses propositions de polygonométrie. J'en indiquerai une seule application.

Soit ABCD un quadrilatère, et soient placées les masses 1, -1, 1, -1 aux sommets A, B, C, D. Si nous appelons I, K les milieux des diagonales BD, AC, on aura :

$$\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 - \overline{DA}^2 = -4\,\overline{IK}^2.$$

NOTE III

SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ DE CERTAINS VOLUMES.

Considérons un corps solide homogène quelconque, et supposons que l'on sache déterminer les aires des sections faites dans ce corps par la série des plans parallèles à un plan fixe P, ainsi que les centres de gravité de ces sections. Si l'on rapporte le corps à trois axes, rectangulaires ou obliques, assujettis à la seule condition que le plan des yz soit parallèle au plan P, on saura déterminer en fonction de x l'aire S_x d'une section quelconque parallèle au plan des yz, ainsi que les coordonnées y'_1, z'_1 du centre de gravité de cette aire. Cela posé, si l'on mène dans le corps une série de sections infiniment voisines, parallèles au plan des yz, et si l'on remplace le volume du corps compris entre deux de ces sections consécutives par le cylindre ayant pour base l'une d'elles et dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x, le centre de gravité du cylindre qui admet pour base la section menée à la distance x aura pour coordonnées :

$$x + \frac{dx}{2}, \quad y'_1, \quad z'_1;$$

son volume aura pour expression :

$$k\, S_x\, dx,$$

k désignant le sinus de l'angle de Ox et du plan des yz. Par conséquent, l'application du théorème des moments nous donnera, en désignant par V le volume du corps et par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} V\ \ &= k\int S_x\,dx,\\ Vx_1 &= k\int x\,S_x\,dx,\\ Vy_1 &= k\int y_1'\,S_x\,dx,\\ Vz_1 &= k\int z_1'\,S_x\,dx.\end{aligned}\right.$$

Les intégrales triples données dans le texte (p. 44) sont donc remplacées ici par des intégrales simples.

Les deux dernières formules (1) conduisent immédiatement à une conséquence importante :

Si les centres de gravité d'une série de sections parallèles dans un solide homogène sont en ligne droite, le centre de gravité du solide se trouve aussi sur cette droite.

Il suffit, en effet, de supposer dans les formules (1) que l'on a pris pour axe des x précisément la droite qui contient les centres de gravité de toutes les sections parallèles. Alors y_1' et z_1' sont nulles pour toutes les valeurs de x et les valeurs de y_1 et de z_1 données par nos deux dernières équations se réduisent à zéro.

Considérons, par exemple, le segment déterminé dans un ellipsoïde homogène et plus généralement dans une surface du second degré quelconque par deux plans parallèles. Les sections par les plans parallèles aux deux bases sont des ellipses ayant leurs centres en ligne droite. Par conséquent :

Le centre de gravité de tout segment ellipsoïdal à bases parallèles se trouve sur la ligne qui joint les centres des deux bases elliptiques.

Je vais maintenant appliquer les deux premières formules (1) au cas où l'expression de S_x revêt la forme simple :

$$S_x = a + bx + cx^2,$$

et, pour plus de simplicité, je supposerai que les axes soient rectangulaires, ce qui donnera $k = 1$; je vais déterminer le centre de gravité du segment, de hauteur h, compris entre les plans :

$$x = 0, \qquad x = h.$$

On aura alors :

$$(2)\qquad V = \int_0^h (a + bx + cx^2)\,dx = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3},$$

et

$$(3)\qquad Vx_0 = \int_0^h (a + bx + cx^2)\,x\,dx = \frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4},$$

x_0 désignant la distance du centre de gravité du segment au plan des yz ou à l'une des bases du segment.

Au lieu de garder dans les formules les coefficients a, b, c qui n'ont aucune signification, nous allons introduire les aires des deux bases S_0, S_1, et l'aire de la section moyenne σ, correspondante à la valeur $\frac{h}{2}$ de x. On a alors :

$$(4)\qquad S_0 = a,\quad S_1 = a + bh + ch^2,\quad \sigma = a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4}.$$

On peut de ces équations tirer a, b, c, ce qui donne aux équations (2) et (3) la forme élégante :

$$(5)\qquad V = \frac{h}{6}(S_0 + S_1 + 4\sigma),$$

$$(6)\qquad Vx_0 = \frac{h^2}{6}(S_1 + 2\sigma).$$

Si nous désignons par x_1 la distance $h - x_0$ du centre de gravité à la base S_1 du segment considéré, on aura par raison de symétrie :

$$Vx_1 = \frac{h^2}{6}(S_0 + 2\sigma),$$

et par conséquent :

$$(7)\qquad \frac{x_0}{x_1} = \frac{S_1 + 2\sigma}{S_0 + 2\sigma}.$$

Arrêtons-nous d'abord à la formule (5). Elle nous donne un théorème extrêmement connu, mais très utile.

Si l'aire de la section faite dans un corps par un plan parallèle à un plan fixe est une fonction du second degré de la distance de ce plan à une de ses positions, le volume du segment compris entre deux positions quelconques du *plan sera exprimé en fonction de la hauteur du segment et des aires des trois sections déjà définies, par la formule* (5).

Ce théorème subsiste dans le cas où la fonction S_x est du troisième degré par rapport à x; cette remarque trouvera plus loin son application.

On connaît un grand nombre de solides pour lesquels la fonction S_x est du second degré. Nous pouvons d'abord citer tous les solides de la géométrie élémentaire, le tronc de cône, le segment sphérique, etc. Dans le cas du tronc de cône, les aires des sections sont proportionnelles au carré de la distance de leur plan au sommet du cône. On aura donc :

$$\sqrt{\sigma} = \frac{\sqrt{S_0} + \sqrt{S_1}}{2},$$

et par conséquent, l'application des formules (5) et (7) donne ici :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} V &= \frac{h}{3}\left(S_0 + S_1 + \sqrt{S_0 S_1}\right), \\ \frac{x_0}{x_1} &= \frac{3S_1 + S_0 + 2\sqrt{S_0 S_1}}{3S_0 + S_1 + 2\sqrt{S_0 S_1}}. \end{aligned} \right.$$

Pour le segment sphérique à deux bases, si l'on prend pour l'origine des coordonnées le centre de la sphère, on aura :

$$\begin{aligned} S_0 &= \pi\,(R^2 - x^2), \\ S_1 &= \pi\,[R^2 - (x + h)^2], \\ \sigma &= \pi\left[R^2 - \left(x + \frac{h}{2}\right)^2\right], \end{aligned}$$

ce qui donne la relation :

$$S_0 + S_1 - 2\sigma = -\pi\frac{h^2}{2},$$

et par conséquent on peut mettre le volume du segment sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$\sigma h - \frac{\pi h^2}{12},$$

$$\frac{S_0 + S_1}{2}h + \frac{\pi h^2}{6}.$$

Les formules (1) sont encore applicables à toutes les surfaces du second degré, comme on le reconnaîtra aisément par un calcul direct. Mais on peut rattacher cette propriété des surfaces du second degré à une proposition plus générale en montrant que *dans toute surface réglée, les aires des sections par des plans parallèles sont exprimées par un polynôme du second degré* [1].

Soient en effet :

$$y = ax + p,$$
$$z = bx + q,$$

les équations qui définissent une surface réglée et où a, b, p, q sont des fonctions données d'un paramètre α. L'aire de la section par un plan parallèle au plan des yz sera donnée par la formule :

$$S_x = \frac{1}{2}\int (y\,dz - z\,dy), \tag{9}$$

où l'intégrale est étendue à tout le contour de la section. En remplaçant y, z par leurs valeurs on a :

$$2S_x = x^2 \int (a\,db - b\,da) + x \int (p\,db - b\,dp + a\,dq - q\,da) + \int (p\,dq - q\,dp),$$

et ainsi se trouve démontrée la proposition que nous avions en vue.

Nous pouvons ici appliquer les deux dernières formules (1) et obtenir un résultat élégant. En effet, considérons la section par le plan parallèle au plan des yz, son aire est déjà donnée par la formule (9). Quant à son centre de gravité, on peut le déterminer comme il suit :

Si l'on envisage la section comme composée des triangles élémentaires dont l'aire a pour expression :

$$\frac{1}{2}(y\,dz - z\,dy),$$

les centres de gravité de ces triangles auront pour coordonnées $\frac{2y}{3}$, $\frac{2z}{3}$ et par conséquent on aura, en appliquant le théorème des

[1] Voir J. BERTRAND, *Traité de Calcul Intégral*, p. 411, 412.

moments :

$$y'_1\, S_x = \frac{1}{3}\int y\,(y\,dz - z\,dy),$$
$$z'_1\, S_x = \frac{1}{3}\int z\,(y\,dz - z\,dy).$$

Les intégrations donnent pour $y'_1 S_x$, $z'_1 S_x$ des expressions du troisième degré en x, de la forme :

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

On obtient donc déjà ce premier théorème : *Le lieu des centres de gravité des sections parallèles faites dans une surface du second degré est en général une cubique gauche.*

D'autre part, appuyons-nous sur la proposition déjà signalée plus haut et d'après laquelle on a :

$$\int_0^h \varphi(x)\,dx = \frac{h}{6}\left[\varphi(0) + \varphi(h) + 4\varphi\left(\frac{h}{2}\right)\right],$$

toutes les fois que $\varphi(x)$ est un polynôme du troisième degré au plus en x.

La troisième formule (1) nous donnera :

$$\text{(10)} \qquad V y_1 = \frac{h}{6}\,[S_0\, y'_0 + S_1 y'_1 + 4\sigma y'_2],$$

y'_0, y'_1, y'_2 étant les y des centres de gravité des aires S_0, S_1, σ. On aurait de même la formule analogue :

$$\text{(11)} \qquad V z_1 = \frac{h}{6}\,[S_0 z'_0 + S_1 z'_1 + 4\sigma z'_2].$$

En rapprochant ces deux formules de l'équation (6), on obtient le résultat suivant :

Pour construire le centre de gravité du segment à deux bases, compris entre deux sections parallèles d'une surface réglée, on placera aux centres de gravité de ces deux bases, des masses égales respectivement aux aires de ces deux bases et, au centre de gravité de la section menée à égale distance des deux bases, une masse égale à quatre fois l'aire de cette section. Le centre de gravité des trois masses ainsi définies sera le centre de gravité du segment.

NOTE IV

SUR LE SYSTÈME DE QUATRE FORCES EN ÉQUILIBRE.

Il a été montré à l'article 107 que lorsque quatre forces se font équilibre, les lignes d'action de ces forces constituent quatre génératrices d'un même système, d'une surface réglée du second ordre. Je me propose d'établir ici la réciproque et de prouver que lorsque quatre droites appartiennent à une surface du second ordre, elles peuvent être prises pour lignes d'action de quatre forces se faisant équilibre.

Supposons d'abord que ces quatre droites appartiennent à un hyperboloïde; si on leur mène des parallèles par un point quelconque de l'espace, trois quelconques de ces parallèles formeront un trièdre. Il sera donc possible de déterminer les grandeurs de quatre forces dirigées suivant ces parallèles et se faisant mutuellement équilibre. Pour cela, il suffira de construire le parallélipipède admettant pour arêtes trois de ces droites et pour diagonale la quatrième. Les quatre forces représentées par les trois arêtes et par une droite égale et opposée à la diagonale se feront évidemment équilibre. Remarquons que les rapports mutuels de ces forces sont seuls déterminés et que l'on ne détruirait pas l'équilibre, si on les multipliait toutes par un même nombre.

Transportons maintenant ces forces respectivement sur les quatre droites données qui leur sont parallèles. On aura ainsi constitué un système de quatre forces, admettant pour lignes d'action les droites données et dont la résultante générale sera évidemment nulle. Par conséquent, si l'on fait la réduction des forces en un point quelconque de l'espace suivant la méthode de Poinsot, le couple obtenu sera toujours le même, quel que soit le point où l'on fera la réduction. Je vais démontrer que ce couple est nécessairement nul. Soit en effet d une des génératrices de l'hyperboloïde rencontrant les quatre droites données. Si l'on fait la réduction en transportant les forces en un point de d, les couples qui naissent de la translation de ces forces ont tous leur axe perpendiculaire à d. Donc l'axe du couple résultant sera nul ou perpendiculaire à d. On voit donc que cet axe doit être nul; car il ne saurait être perpendiculaire à toutes les génératrices d'un même système de l'hyperboloïde, qui ne sont pas parallèles à un même plan.

Supposons maintenant que les quatre droites appartiennent à un paraboloïde et soient parallèles, par conséquent, à un même plan. En répétant le raisonnement précédent, on verra facilement que l'on peut placer sur les trois premières droites 1, 2, 3 un premier système de trois forces dont les rapports mutuels seuls seront déterminés et dont la résultante générale sera nulle. On verra comme précédemment que le couple auquel peuvent se réduire ces trois forces a son axe perpendiculaire à toutes les génératrices du second système du paraboloïde. On peut de même placer sur les deux premières droites 1, 2 et la quatrième 4 un second système de trois forces se réduisant à un couple dont l'axe sera aussi perpendiculaire aux génératrices du second système, et par conséquent parallèle à l'axe du premier couple. Soient a et b les valeurs respectives de ces deux axes; si l'on place sur les quatre droites un double système formé des trois premières forces multipliées par λ et des trois dernières multipliées par μ, il y aura deux forces ayant pour lignes d'action chacune des droites 1, 2. En les composant respectivement, il restera un système de quatre forces dirigées suivant les droites 1, 2, 3, 4, dont la résultante générale sera nulle et qui se réduiront à un couple dont l'axe aura évidemment pour grandeur $\lambda a + \mu b$. On pourra donc toujours disposer du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ de telle manière que cet axe soit nul, et alors les quatre forces se feront équilibre.

En appliquant la même méthode, on établira le théorème suivant :

Pour que cinq droites puissent être les lignes d'action de cinq forces se faisant équilibre, il faut et il suffit que les deux droites qui rencontrent les quatre premières rencontrent aussi la cinquième.

Mais l'étude détaillée de cette proposition nous entraînerait trop loin. Nous nous contenterons de signaler ici tout le parti que l'on peut tirer de la belle théorie *des complexes* de Plücker dans l'étude de la réduction des forces appliquées à un corps solide.

NOTE V

SUR L'ÉQUILIBRE ASTATIQUE.

Parmi les systèmes de forces agissant sur un corps solide, les plus importants peut-être sont ceux qui sont composés uniquement de forces parallèles. Leur étude a conduit à la notion du centre des forces parallèles, point d'application d'une force unique ayant même direction que les forces considérées, égale à leur somme algébrique et pouvant toujours les remplacer lorsque le corps change de situation dans l'espace.

Il était naturel de chercher à étendre aux systèmes composés de forces quelconques les propriétés du centre des forces parallèles, c'est à dire d'examiner comment varie l'effet d'un système quelconque de forces appliquées en des points déterminés du corps solide ; soit lorsque, leur grandeur et leur direction demeurant les mêmes, l'orientation du corps vient à changer ; soit, ce qui est la même chose, lorsque, le corps demeurant en repos, les forces changent de direction de manière à conserver entre elles les mêmes angles. Minding, dans le tome XV du *Journal de Crelle*, a donné sur ce sujet un théorème des plus intéressants et il a établi que, toutes les fois que le corps est amené dans une situation où le système des forces a une résultante unique, cette résultante rencontre deux courbes ayant une position fixe dans le corps, qui sont une ellipse et une hyperbole, focales l'une de l'autre.

Dans un petit ouvrage (¹) j'ai étudié les différentes questions que l'on peut se proposer dans cet ordre de recherches. Je me contenterai ici de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que les forces se fassent équilibre dans toutes les positions du corps ; on dit alors que le corps est en équilibre *astatique*.

(¹) G. DARBOUX, *Mémoire sur l'équilibre astatique*. Paris, Gauthier-Villars, 1877.

Au point de vue de cette théorie il est indifférent, nous venons de le voir, soit de supposer que le corps se déplace, les forces conservant leur point d'application, leur grandeur et leur direction; soit d'admettre que le corps demeure en repos, les forces changeant de direction de manière à conserver entre elles les mêmes angles. C'est cette dernière supposition que nous choisirons de préférence. Si l'on veut admettre que le corps se meut, il suffira de supposer que nos axes, mobiles dans l'espace, soient fixes par rapport au corps.

Supposons le corps soumis à l'action de n forces. Nous définirons ces forces par leurs composantes X_i, Y_i, Z_i parallèles aux axes et par les coordonnées x_i, y_i, z_i de leurs points d'application et nous adopterons les notations suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
X_x = \sum X_i x_i, & Y_x = \sum Y_i x_i, & Z_x = \sum Z_i x_i, \\
X_y = \sum X_i y_i, & Y_y = \sum Y_i y_i, & Z_y = \sum Z_i y_i, \\
X_z = \sum X_i z_i, & Y_z = \sum Y_i z_i, & Z_z = \sum Z_i z_i, \\
X_0 = \sum X_i, & Y_0 = \sum Y_i, & Z_0 = \sum Z_i.
\end{array}
$$

Cela posé, considérons un système actuellement en équilibre. On aura les six équations :

$$
(1) \qquad \begin{cases} X_0 = 0, & Y_0 = 0, & Z_0 = 0, \\ Y_z - Z_y = 0, & Z_x - X_z = 0, & X_y - Y_x = 0. \end{cases}
$$

Supposons les axes rectangulaires et cherchons la condition pour que l'équilibre subsiste si l'on imprime au corps une rotation finie autour de Oz. Comme nous supposons les axes entraînés avec le corps, les coordonnées des points d'application ne changeront pas; mais les composantes des forces parallèles à Ox et à Oy ne seront plus les mêmes. Il faudra remplacer :

$$
\begin{array}{lll}
X_i & \text{par} & X_i \cos\varphi + Y_i \sin\varphi, \\
Y_i & \text{par} & -X_i \sin\varphi + Y_i \cos\varphi,
\end{array}
$$

φ désignant l'angle dont le corps a tourné. Les équations de l'équilibre dans la nouvelle position seront par conséquent :

$$\begin{array}{ll} X_0 \cos\varphi + Y_0 \sin\varphi = 0, & -X_z \sin\varphi + Y_z \cos\varphi - Z_y = 0, \\ -X_0 \sin\varphi + Y_0 \cos\varphi = 0, & Z_x - X_z \cos\varphi - Y_z \sin\varphi = 0, \\ Z_0 = 0, & (X_y - Y_x)\cos\varphi + (X_x + Y_y)\sin\varphi = 0. \end{array}$$

Si l'on tient compte des équations (1), les trois premières sont satisfaites, et les autres, après quelques transformations simples, prennent la forme :

$$(2) \quad X_z(1-\cos\varphi) = 0, \quad Y_z(1-\cos\varphi) = 0, \quad (X_x + Y_y)\sin\varphi = 0,$$

et pour qu'elles soient vérifiées pour toutes les valeurs de φ, il faudra ajouter aux équations (1) les trois suivantes :

$$(3) \qquad X_z = 0, \quad Y_z = 0, \quad X_x + Y_y = 0,$$

qui sont à la fois nécessaires et suffisantes.

En imprimant de même au corps des rotations autour des deux autres axes coordonnés, on obtiendra les conditions nouvelles :

$$(4) \qquad Z_x = 0, \quad Y_x = 0, \quad Y_y + Z_z = 0,$$

$$(5) \qquad X_y = 0, \quad Z_y = 0, \quad X_y + Z_y = 0.$$

On a donc en résumé les douze équations de condition :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} X_0 = 0, & X_x = 0, & X_y = 0, & X_z = 0, \\ Y_0 = 0, & Y_x = 0, & Y_y = 0, & Y_z = 0, \\ Z_0 = 0, & Z_x = 0, & Z_y = 0, & Z_z = 0, \end{array} \right.$$

qui sont nécessaires pour l'équilibre astatique.

Il est d'ailleurs très aisé de montrer que ces douze conditions sont suffisantes. En effet, il résulte de la théorie développée p. 38 et 39 que les quatre équations

$$X_0 = 0, \quad X_x = 0, \quad X_y = 0, \quad X_z = 0$$

représentent les conditions nécessaires et suffisantes pour que les forces parallèles X_i appliquées aux points (x_i, y_i, z_i) se fassent équilibre, *quelle que soit leur direction.*

Les équations (6) expriment donc que les trois systèmes de forces parallèles, formés par les composantes parallèles aux trois axes des forces données, considérés isolément, se font équilibre, et se feront encore équilibre quand la position du corps sera changée. On voit donc bien que l'équilibre existera pour toutes les orientations du corps.

Le raisonnement précédent montre d'ailleurs que les équations (6) conserveront encore la même forme lorsqu'on emploiera des axes obliques.

NOTE VI

SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DE L'ELLIPSOÏDE.

Dans l'étude de l'équilibre d'un fil flexible, il a été démontré que lorsqu'un fil est tendu sur une surface, la tension est constante et la figure du fil est celle d'une ligne géodésique de la surface. Nous allons considérer le cas où la surface est un ellipsoïde que nous supposerons rapporté à son centre et à ses axes.

Soit :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

l'équation de la surface. Les composantes de la force appliquée à un élément du fil seront :

$$\lambda\frac{x}{a^2}\,ds,\qquad \lambda\frac{y}{b^2}\,ds,\qquad \lambda\frac{z}{c^2}\,ds,$$

λ étant une quantité inconnue. En appliquant donc les formules (1) de la page 133, nous aurons :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)+\lambda\frac{x}{a^2}\,ds=0,\\ &d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right)+\lambda\frac{y}{b^2}\,ds=0,\\ &d\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right)+\lambda\frac{z}{c^2}\,ds=0,\end{aligned}\right.$$

pour les équations différentielles de l'équilibre du fil. Tenons compte de ce que T est constant et prenons s comme variable indépendante; posons pour abréger :

$$\frac{\lambda}{\mathrm{T}}=-\mu,$$

les équations (1) prendront la forme :

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \mu \frac{x}{a^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mu \frac{y}{b^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \mu \frac{z}{c^2}.$$

Telles sont les équations différentielles du second ordre qui caractérisent la ligne géodésique. On peut obtenir, comme il suit, l'intégrale première.

Ajoutons les équations, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$, nous aurons :

$$(3) \qquad \frac{x}{a^2}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{y}{b^2} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{z}{c^2} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = \mu\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right).$$

Mais en différentiant deux fois l'équation de l'ellipsoïde, on obtient l'identité :

$$\frac{x}{a^2}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{y}{b^2} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{z}{c^2} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{dx^2}{a^2ds^2} - \frac{dy^2}{b^2ds^2} - \frac{dz^2}{c^2ds^2},$$

et par conséquent l'équation (3) peut s'écrire :

$$(4) \qquad \frac{dx^2}{a^2ds^2} + \frac{dy^2}{b^2ds^2} + \frac{dz^2}{c^2ds^2} = -\mu\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right).$$

Ajoutons maintenant les équations (2) après les avoir multipliées respectivement par $\frac{dx}{a^2}, \frac{dy}{b^2}, \frac{dz}{c^2}$. Nous aurons :

$$(5) \qquad \frac{dx\,d^2x}{a^2ds^2} + \frac{dy\,d^2y}{b^2ds^2} + \frac{dz\,d^2z}{c^2ds^2} = \mu\left(x\frac{dx}{a^4} + y\frac{dy}{b^4} + z\frac{dz}{c^4}\right).$$

Divisant membre à membre les équations (4) et (5), nous obtenons la relation :

$$(6) \qquad \frac{\dfrac{dx\,d^2x}{a^2ds^2} + \dfrac{dy\,d^2y}{b^2ds^2} + \dfrac{dz\,d^2z}{c^2ds^2}}{\dfrac{dx^2}{a^2ds^2} + \dfrac{dy^2}{b^2ds^2} + \dfrac{dz^2}{c^2ds^2}} = -\frac{x\dfrac{dx}{a^4} + y\dfrac{dy}{b^4} + z\dfrac{dz}{c^4}}{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}},$$

dont les deux membres sont des différentielles exactes et dont l'intégration n'offre par conséquent aucune difficulté.

On trouve ainsi pour l'équation différentielle du premier ordre des lignes géodésiques :

$$(7) \qquad \left(\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}\right)\times\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)=\text{K}\,ds^2,$$

K désignant une constante arbitraire.

Joachimsthal a donné de cette équation une interprétation géométrique élégante. La distance P du centre de l'ellipsoïde au plan tangent au point (x, y, z) a pour expression :

$$\text{P}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Le diamètre D, parallèle à la tangente à la ligne géodésique, a pour grandeur :

$$\text{D}=\frac{ds}{\sqrt{\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}}},$$

et, par conséquent, l'équation (7) se traduit par la relation géométrique :

$$(8) \qquad \text{PD} = \text{constante};$$

c'est le résultat de Joachimsthal.

Mais il est intéressant d'observer que l'équation (8) ou l'équation équivalente (7) n'est nullement caractéristique des lignes géodésiques et qu'elle a lieu également pour les lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Pour le démontrer, nous allons considérer une courbe satisfaisant à l'équation différentielle (7) et nous allons chercher si cette équation entraîne le système (1) qui seul caractérise les lignes géodésiques.

L'élimination de K nous donnera l'équation (6) que l'on peut évidemment remplacer par les équations (4) et (5), en introduisant la nouvelle inconnue μ. L'équation (4), en vertu de l'équation de l'ellipsoïde, est équivalente à l'équation (3) ; en sorte que le système des équations (3) et (5) est absolument équivalent à l'équation (7).

Ajoutons-lui l'équation évidente :

$$(9) \qquad \frac{dx\,d^2x}{ds^2}+\frac{dy.d^2y}{ds^2}+\frac{dz\,d^2z}{ds^2}=0.$$

Les trois équations (3), (5), (9) considérées comme devant donner les inconnues $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ sont évidemment vérifiées par les valeurs de ces inconnues tirées du sytème (1). Elles seront donc équivalentes aux équations (1) tant que leur déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2}, & \frac{y}{b^2}, & \frac{z}{c^2}, \\ \frac{dx}{a^2}, & \frac{dy}{b^2}, & \frac{dz}{c^2}, \\ dx, & dy, & dz, \end{vmatrix}$$

ne sera pas nul. Mais si ce déterminant est nul, les équations (1) ne pourront plus être considérées comme une conséquence du système (3), (5), (9) ou, ce qui est la même chose, de l'équation (7).

On reconnaît aisément que l'équation différentielle obtenue en égalant le déterminant à zéro est celle des lignes de courbure ; pour chaque valeur de la constante K, l'équation (7) admet comme solution particulière *une* ligne de courbure qui peut être considérée comme l'enveloppe de toutes les lignes géodésiques satisfaisant à cette équation. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

L'équation (7) *ou son équivalente* (8) *exprime une propriété commune aux lignes de courbure et aux lignes géodésiques.*

Une fois obtenue l'équation différentielle du premier ordre des lignes géodésiques, on trouve facilement l'équation en termes finis de ces lignes. Il suffit de faire un changement de variables et de rapporter l'ellipsoïde au système de coordonnées curvilignes formé par les lignes de courbure. Ce choix de variable est naturellement indiqué, car il a pour effet d'éliminer immédiatement les solutions étrangères de l'équation (7), données par les deux systèmes de lignes de courbure. L'équation différentielle se ramène alors à une forme dans laquelle les variables sont séparées et qui s'intègre immédiatement. Mais nous voulions seulement indiquer ici la méthode précédente, qui conduit rapidement à l'intégrale première et que nous avons introduite depuis longtemps dans notre enseignement.

NOTE VII

PROBLÈME DE MÉCANIQUE.

Trouver la figure d'équilibre d'un fil flexible et inextensible non pesant, traversé par un courant et soumis à l'influence du pôle d'un aimant.

Rapportons le fil à trois axes rectangulaires, ayant leur origine O au pôle d'un aimant. Les composantes de l'action de ce pôle sur un élément ds du fil seront :

$$\frac{\mu(ydz - zdy)}{r^3}, \quad \frac{\mu(zdx - xdz)}{r^3}, \quad \frac{\mu(xdy - ydx)}{r^3},$$

r désignant la distance de cet élément à l'origine et μ une constante; par conséquent, les équations d'équilibre du fil seront, en désignant par T la tension :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \mu\frac{ydz - zdy}{r^3} = 0, \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \mu\frac{zdx - xdz}{r^3} = 0, \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \mu\frac{xdy - ydx}{r^3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce sont ces équations qu'il s'agit d'intégrer.

En les multipliant par dx, dy, dz et les ajoutant, on obtient :

$$(2) \qquad dT = 0;$$

donc la tension est constante. Ce résultat était évident *à priori*, puisque la force appliquée à chaque élément est normale à cet élément.

Ajoutons maintenant les équations (1) après les avoir multipliées par x, y, z respectivement. Nous trouverons, en tenant compte de l'équation (2),

$$\mathrm{T}\left(x d \frac{dx}{ds} + y d \frac{dy}{ds} + z d \frac{dz}{ds}\right) = 0. \tag{3}$$

Cette équation exprime que la normale principale en un point de la courbe d'équilibre est perpendiculaire au rayon vecteur de ce point, c'est à dire que *la figure d'équilibre est une ligne géodésique du cône ayant son sommet à l'origine et contenant cette courbe.*

Comme la précédente, cette proposition pouvait se prévoir *à priori.* L'action sur l'élément du fil est normale au cône passant par le fil et ayant son sommet à l'origine; or on sait que le plan osculateur de la figure d'équilibre doit contenir cette force : il est donc normal au cône précédent.

On peut du reste trouver trois intégrales premières des équations (1). Ajoutons, par exemple, la deuxième et la troisième de ces équations, après les avoir multipliées par $-z$, y respectivement. Nous aurons :

$$d\left[\mathrm{T}\left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds}\right)\right] + \mu\left(\frac{x\,dr}{r^2} - \frac{dx}{r}\right) = 0,$$

ou, en intégrant :

$$\mathrm{T}\left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds}\right) = \frac{\mu x}{r} + \alpha,$$

α désignant une constante.

On aura, par des combinaisons analogues, deux autres intégrales premières qui, jointes à la précédente, constituent le système suivant :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{T}\left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds}\right) &= \mu \frac{x}{r} + \alpha, \\ \mathrm{T}\left(z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds}\right) &= \mu \frac{y}{r} + \beta, \\ \mathrm{T}\left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds}\right) &= \mu \frac{z}{r} + \gamma. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Multiplions ces équations par x, y, z respectivement et ajoutons-les. Nous aurons :

$$\mu r + \alpha x + \beta y + \gamma z = 0. \tag{5}$$

C'est l'équation d'une surface qui contient le fil en équilibre. Or cette surface est évidemment un cône de révolution, ayant son sommet à l'origine et d'ailleurs quelconque. On a donc le théorème suivant :

Si un fil flexible et inextensible non pesant, traversé par un courant, est soumis à l'action du pôle d'un aimant, sa figure d'équilibre sera une ligne géodésique d'un cône de révolution, ayant son sommet au pôle de l'aimant.

Il ne nous reste, pour terminer, qu'à indiquer comment, étant données les positions des deux extrémités du fil et sa longueur totale, on déterminera le cône sur lequel il doit se trouver.

Soient A et B les deux extrémités du fil et l la longueur de ce fil ; la question revient à construire un cône de révolution connaissant deux de ses génératrices OA, OB et la longueur l de la ligne géodésique qui réunit les deux points A et B.

Voici comment on peut résoudre ce problème. Je suppose le cône inconnu développé sur un quelconque de ses plans tangents. OA sera venu en Oa, OB en Ob et la figure d'équilibre se sera transformée dans la droite ab. On connaît donc les trois côtés du triangle Oab et, par conséquent, l'angle aOb. Ce point étant acquis, on est ramené au problème suivant :

Faire passer par deux droites OA, OB *un cône de révolution tel que, après le développement de ce cône sur un plan, l'angle des droites* AOB *se transforme en un angle de grandeur donnée.*

Soient α, β les points des droites OA, OB à une distance 1 de l'origine. La sphère de rayon 1 ayant son centre au point O coupera le cône suivant un cercle. On connaît, à la fois, l'arc $\alpha\beta$ et la corde $\alpha\beta$ de ce cercle. En effet, l'arc $\alpha\beta$ se transforme, dans le développement du cône, en un arc de cercle et mesure l'angle que nous avons appelé aOb. La question est donc ramenée à construire un cercle connaissant la longueur d'un de ses arcs et de la corde de cet arc, problème qui conduit à une équation transcendante bien connue.

NOTE VIII

SUR LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE INVARIABLE.

I

Considérons une figure plane, mobile dans son plan, et rapportons-la à deux axes rectangulaires Ox, Oy liés invariablement avec elle. Soient au contraire $O'x_1$, $O'y_1$, deux axes rectangulaires fixes. Un point M de la figure mobile aura, par rapport aux axes Ox, Oy des coordonnées constantes que je désignerai par les lettres x, y et il aura par rapport aux axes $O'x_1$, $O'y_1$ des coordonnées variables que je désignerai par x_1, y_1. On aura entre x, y, x_1, y_1 deux relations de la forme :

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= (x - \alpha) \cos \omega - (y - \beta) \sin \omega, \\ y_1 &= (x - \alpha) \sin \omega + (y - \beta) \cos \omega, \end{aligned}$$

α, β, ω étant des fonctions d'une même variable; α et β sont les coordonnées de l'origine O' des axes fixes par rapport aux axes mobiles. On peut considérer, si l'on veut, α, β comme des fonctions de ω dont la connaissance détermine complètement le mouvement de la figure mobile dans son plan.

Les plus intéressants des mouvemements que l'on a à considérer jouissent d'une propriété remarquable; ils sont périodiques ou fermés, c'est à dire que la figure mobile, après avoir parcouru toutes les positions qu'elle peut prendre, revient à sa position initiale et ne peut continuer à se mouvoir qu'en repassant par toutes les positions qu'elle a occupées. Considérons, par exemple, une figure mobile dont deux points sont assujettis à décrire deux droites. Un point quelconque de cette figure décrira une ellipse, et quand il aura parcouru cette ellipse pour revenir à sa position initiale, il en sera de même de la figure entière qui sera ramenée à sa position primitive et ne pourra que recommencer le mouvement qu'elle vient d'accomplir.

Il est clair que, dans les mouvements fermés, la variable ω qui représente l'angle des axes Ox, $O'x_1$ reviendra, quand le mouvement sera accompli, soit à sa valeur initiale, soit à cette valeur augmentée d'un multiple quelconque de 2π. Considérons, par exemple, la figure mobile formée par la tangente et la normale en un point d'une ellipse. Lorsque le point, après avoir fait le tour de l'ellipse, reviendra à sa position initiale, la figure aura évidemment tourné de 2π. Si l'on substitue au contraire une lemniscate à l'ellipse, la rotation totale de cette figure sera nulle; si l'on fait rouler une ellipse sur une ellipse égale, la rotation de la figure mobile sera 4π.

Il est clair que, dans tous les mouvements périodiques ou fermés, les trajectoires de tous les points de la figure mobile sont des courbes fermées.

Ces remarques préliminaires étant faites, considérons deux positions distinctes P_0, P_1 de la figure mobile, caractérisées par les valeurs ω_0, ω_1 de la variable ω. Nous allons déterminer l'aire comprise entre l'arc M_0M_1 décrit par un point M de la figure mobile dans le passage de la première position à la seconde et les deux rayons vecteurs $O'M_0$, $O'M_1$ qui joignent le point O' aux deux extrémités de l'arc M_0M_1. Cette aire $\mathfrak{A}$ sera donnée par la formule :

$$2\mathfrak{A} = \int_{M_0}^{M_1} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1), \tag{2}$$

x_1, y_1 désignant les coordonnées du point décrivant par rapport aux axes fixes. Or, si l'on pose :

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \alpha + \frac{d\beta}{d\omega}, \\ \eta &= \beta - \frac{d\alpha}{d\omega}, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

on aura :

$$\begin{aligned} dx_1 &= -(x-\xi)\sin\omega\, d\omega - (y-\eta)\cos\omega\, d\omega, \\ dy_1 &= (x-\xi)\cos\omega\, d\omega - (y-\eta)\sin\omega\, d\omega, \end{aligned}$$

et ces formules montrent que ξ, η sont les coordonnées du centre instantané de rotation par rapport aux axes mobiles. On en déduit :

$$x_1\, dy_1 - y_1\, dx_1 = (x - \alpha)\,(x - \xi)\, d\omega + (y - \beta)\,(y - \eta)\, d\omega,$$

ce qui donne :

$$(4)\quad 2\mathfrak{A} = (x^2 + y^2)\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega - x\int_{\omega_0}^{\omega_1}(\alpha + \xi)\, d\omega - y\int_{\omega_0}^{\omega_1}(\beta + \eta)\, d\omega + \int_{\omega_0}^{\omega_1}(\beta\eta + \alpha\xi)\, d\omega,$$

ω_0 et ω_1 étant les valeurs initiale et finale de ω. Posons :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega = \omega_1 - \omega_0 = \theta,\\ &\int_{\omega_0}^{\omega_1}(\alpha + \xi)\, d\omega = 2\mathrm{A},\\ &\int_{\omega_0}^{\omega_1}(\beta + \eta)\, d\omega = 2\mathrm{B},\\ &\int_{\omega_0}^{\omega_1}(\beta\eta + \alpha\xi)\, d\omega = 2\mathrm{C}; \end{aligned}\right.$$

θ sera l'angle dont la figure mobile aura tourné dans le passage de la première position à la seconde et l'on aura :

$$(6)\qquad \mathfrak{A} = \frac{\theta}{2}(x^2 + y^2) - \mathrm{A}x - \mathrm{B}y + \mathrm{C};$$

A, B, C sont des intégrales qu'il sera plus ou moins difficile de calculer, mais qui sont absolument indépendantes de x et de y. La formule précédente exprime donc le théorème suivant :

Quand une figure plane qui se meut dans son plan passe d'une position P_0 *à une autre position* P_1, *l'aire qu'a décrite, dans le passage de la première position à la seconde, le rayon vecteur qui joint un point quelconque* M *de cette figure à un point fixe, est égale à la moitié de l'angle dont cette figure a tourné, multipliée par la puissance du point* M *par rapport à un cercle déterminé de la figure mobile.*

Il y a plusieurs remarques à présenter sur ce théorème.

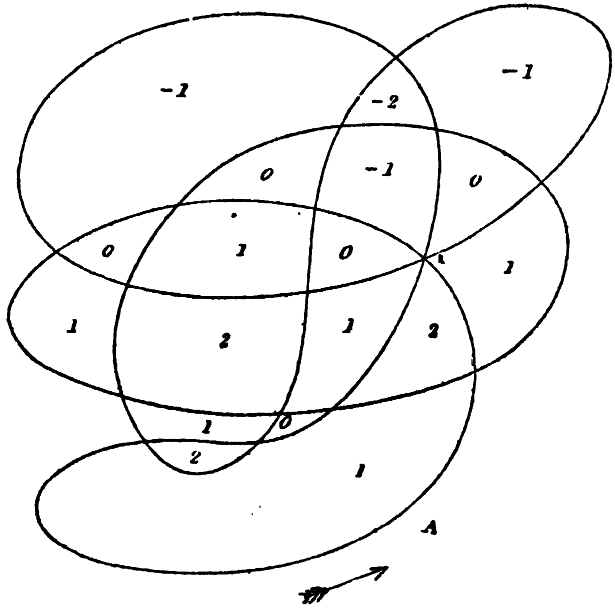
D'abord il peut se faire que les trajectoires des points de la figure mobile aient une forme compliquée, qu'elles se coupent elles-mêmes en un ou plusieurs points et l'on peut se demander quelle sera alors la signification géométrique de l'intégrale :

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\int (x_1\, dy_1 - y_1\, dx_1),$$

que nous avons calculée. Voici la règle que l'on doit à Gauss et qui permet de répondre à cette question.

Considérons en premier lieu une courbe fermée, par exemple celle qui est représentée dans la figure 168 et supposons que l'intégrale soit prise, la courbe étant parcourue dans le sens de la flèche; alors on connaît le sens dans lequel doit être parcouru chacun des traits de la courbe qui séparent les différentes régions dans lesquelles le plan est divisé. On déterminera des coefficients numériques pour chacune de ces régions de la manière suivante. On adoptera le coefficient 0 pour l'aire extérieure et l'on conviendra que, pour deux régions quelconques

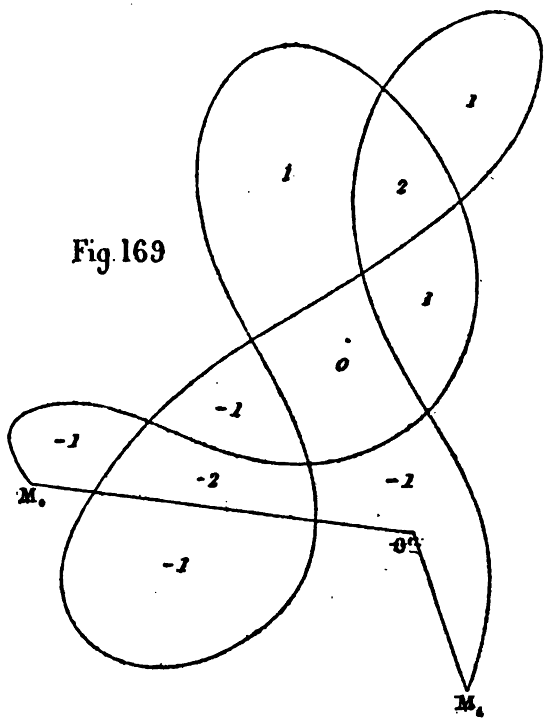
Fig. 168



séparées par l'un des traits de la courbe, la différence des coefficients sera l'unité, le plus grand coefficient étant affecté à l'aire située à la gauche du trait, c'est à dire à la gauche d'un observateur qui parcourt, dans le sens indiqué par la flèche, la portion de la courbe qui sépare les deux régions. Par exemple, si l'on part du point A, l'aire extérieure ayant le coefficient 0, la région située à gauche de A devra être affectée du coefficient 1. En continuant à parcourir la courbe et en appliquant la règle toutes les fois qu'on le pourra, on déterminera successivement les coefficients qui conviennent à chaque région.

Cette opération étant terminée, l'intégrale $\mathfrak{A}$ représentera la somme des aires de toutes les régions, multipliées chacune par le coefficient qui lui appartient, et c'est à cette somme que nous donnerons le nom d'*aire de la courbe*. On voit qu'elle est indépendante de l'origine des coordonnées choisies.

Fig. 169



Si la courbe n'est pas fermée et qu'elle s'étende du point M_0 au point M_1 comme dans la figure 169, on la fermera en ajoutant les deux rayons vecteurs $O'M_0$, $O'M_1$ qui joignent ces deux points à l'origine des coordonnées et en supposant qu'on revienne de M_1 à M_0 par le chemin $M_1O'M_0$.

Après avoir rappelé la signification de l'intégrale $\mathfrak{A}$, il nous reste à dire quelques mots des coefficients A, B qui figurent dans la formule (6) et qui sont définis par les équations (5). On a :

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi \, d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega_1} (\alpha \, d\omega + d\beta),$$

et par suite :

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \alpha \, d\omega = \beta_0 - \beta_1 + \int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi \, d\omega,$$

β_0, β_1 désignant les valeurs de β correspondantes aux valeurs ω_0, ω_1 de ω. On aura donc :

$$A = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi \, d\omega + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2},$$

et de même :

$$B = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \eta \, d\omega - \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}.$$

Les intégrales qui figurent dans ces expressions de A et de B s'interprètent géométriquement de la manière suivante.

Nous avons vu que ξ, η sont les coordonnées du centre instantané de rotation par rapport aux axes mobiles. On sait que la courbe (K), lieu de ce centre instantané dans la figure mobile, roule sur une courbe fixe (K'). Soient à un instant quelconque R et R' les rayons de courbure des deux courbes en leur point de contact. Quand on passera de la position actuelle à la position infiniment voisine, le centre instantané décrira le même arc ds sur chacune de ces courbes et la figure mobile tournera évidemment d'un angle égal à la somme des angles de contingence des deux courbes $\frac{ds}{R}$, $\frac{ds}{R'}$. On a donc :

$$d\omega = ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Par suite, si l'on suppose que l'arc de la courbe (K) ait en chaque point une densité égale à $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$, le centre de gravité d'un arc de cette courbe aura ses coordonnées ξ', η' déterminées par les formules :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi'\,(\omega_1-\omega_0)=\xi'\theta &= \int_{\omega_0}^{\omega_1}\xi\, d\omega,\\ \eta'\theta &= \int_{\omega_0}^{\omega_1}\eta\, d\omega. \end{aligned}\right.$$

Le point (ξ', η') est précisément celui que Steiner a nommé centre de gravité des courbures. En l'introduisant dans les expressions de A et de B on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} A &= \theta\xi' + \frac{\beta_0-\beta_1}{2},\\ B &= \theta\eta' - \frac{\alpha_0-\alpha_1}{2}, \end{aligned}\right.$$

et par conséquent la formule (6) pourra s'écrire :

$$\mathfrak{A} = \frac{\theta}{2}\left[x^2+y^2-2\left(\xi'+\frac{\beta_0-\beta_1}{2\theta}\right)x-2\left(\eta'-\frac{\alpha_0-\alpha_1}{2\theta}\right)y\right]+C.$$

Tous les cercles, lieux des points de la figure mobile dont les rayons vecteurs auront décrit la même aire dans le passage de la position P_0 à la position P_1, auront donc pour centre le point dont les coordonnées par rapport aux axes mobiles sont :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \xi' + \frac{\beta_0-\beta_1}{2\theta},\\ y &= \eta' - \frac{\alpha_0-\alpha_1}{2\theta}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules se simplifient dans deux cas :

1° Si l'on suppose que le point O', origine des rayons vecteurs, soit le centre de la rotation finie par laquelle on peut amener la figure mobile de la première position à la seconde, on aura évidemment :

$$\alpha_0=\alpha_1,\qquad \beta_0=\beta_1,\qquad x=\xi',\qquad y=\eta',$$

ce qui donne le théorème suivant :

L'aire décrite, dans le passage d'une position P_0 *de la figure mobile à une autre position quelconque* P_1, *par le rayon vecteur joignant un point* M *de la figure mobile au centre de la rotation finie qui peut amener la figure de* P_0

en P_1, *est égale à la moitié de la rotation totale de la figure, multipliée par la puissance du point* M *par rapport à un cercle déterminé, ayant son centre au centre de gravité des courbures de l'arc de la roulette mobile décrit par le centre instantané dans le passage de la première position à la seconde.*

2° Si le mouvement est périodique et que l'on considère toute la période pendant laquelle les différents points décrivent des courbes fermées, on aura encore $\alpha_0 = \alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1$. Donc :

Quand un mouvement est périodique, les aires des courbes fermées décrites par les différents points de la figure mobile sont égales précisément à la moitié de la rotation totale multipliée par la puissance du point décrivant par rapport à un cercle fixe de la figure mobile dont le centre est le centre de gravité des courbures de la roulette mobile.

C'est le théorème démontré par Steiner dans le cas où les roulettes sont des courbes convexes.

Il est bon de remarquer, une fois pour toutes, que dans le cas où la rotation totale de la figure mobile serait nulle, l'aire définie par la formule (6) deviendrait une fonction du premier degré de x et de y et serait par conséquent proportionnelle à la distance du point décrivant à une droite fixe. Ce cas particulier n'offre aucune difficulté.

Après avoir étudié les différentes formes de la proposition générale, examinons les conséquences qu'on peut en déduire.

Soient S_1, S_2, S_3 les aires relatives à trois points en ligne droite M_1, M_2, M_3 de la figure mobile. Nous pouvons toujours supposer que ces points soient sur la droite $y = 0$; en désignant leurs abscisses par x_1, x_2, x_3 nous aurons :

$$S_1 = \frac{\theta}{2} x_1^2 - A x_1 + C,$$

$$S_2 = \frac{\theta}{2} x_2^2 - A x_2 + C,$$

$$S_3 = \frac{\theta}{2} x_3^2 - A x_3 + C,$$

et en éliminant A et C nous trouverons :

$$S_1(x_2 - x_3) + S_2(x_3 - x_1) + S_3(x_1 - x_2) = \frac{\theta}{2}(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3).$$

Désignons par (ik) la distance M_iM_k prise avec le signe + ou —

suivant le sens dans lequel elle est portée. L'équation précédente deviendra :

$$(9)\qquad S_1(23) + S_2(31) + S_3(12) + \frac{\theta}{2}(12)(23)(31) = 0.$$

Par exemple, si l'on suppose que les points 2, 3 décrivent une même courbe fermée, on aura $S_2 = S_3$ et l'équation précédente donnera :

$$S_2 - S_1 = \frac{\theta}{2}(12)(31).$$

Supposons, par exemple, que la courbe soit convexe et analogue à une ellipse, on aura alors $\theta = 2\pi$ et la formule précédente deviendra :

$$S_2 - S_1 = \pi(21)(13).$$

L'aire $S_2 - S_1$ *comprise entre les deux courbes est égale à celle du cercle dont le rayon est une moyenne proportionnelle entre* (21) *et* (13).

C'est le théorème bien connu de M. Holditch.

Mais si la courbe était une lemniscate, on aurait $\theta = 0$ et par conséquent :

$$S_2 = S_1;$$

tous les points de la droite décriraient des courbes de même aire.

Soient maintenant S_1, S_2, S_3, S_4 les aires décrites par quatre points de coordonnées $x_1, y_1, \ldots, x_4, y_4$. En écrivant les expressions de ces aires au moyen de la formule (6) et éliminant les constantes A, B, C on aura la relation :

$$\begin{vmatrix} S_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ S_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ S_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ S_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\theta}{2} \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

que l'on peut développer comme il suit. Appelons (123) l'aire du triangle formé par les points 1, 2, 3 prise avec le signe + ou le signe — suivant que le sens de la rotation dirigée de Ox vers Oy sera celui de la rotation autour du triangle ou celui de la rotation contraire. On aura :

$$(10)\quad S_1(234) - S_2(341) + S_3(412) - S_4(123) = (123)\frac{\theta}{2}\cdot P,$$

P désignant la puissance du point 4 par rapport au cercle circonscrit au triangle (123). Ce théorème a déjà été démontré par M. Leudersdorf pour le cas des mouvements fermés.

II

Après avoir étudié les aires décrites par les différents points de la figure mobile, nous allons considérer les différentes courbes enveloppées par les droites de cette figure.

Soit :

$$ux + vy + w = 0, \tag{11}$$

l'équation d'une droite rapportée aux axes mobiles, on peut supposer que l'on ait :

$$u^2 + v^2 = 1.$$

L'équation de cette droite rapportée aux axes fixes sera :

$$u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 = 0, \tag{12}$$

où l'on aura :

$$\begin{aligned} u_1 &= u \cos \omega - v \sin \omega, \\ v_1 &= u \sin \omega + v \cos \omega, \\ w_1 &= w + u\alpha + v\beta, \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$u_1^2 + v_1^2 = 1.$$

Le point où la droite mobile touche son enveloppe est défini par l'équation (12) jointe à la suivante :

$$x_1\, du_1 + y_1\, dv_1 + dw_1 = 0,$$

ce qui donne pour les coordonnées de ce point :

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1 \left(u \frac{d\alpha}{d\omega} + v \frac{d\beta}{d\omega}\right) - u_1 w_1, \\ y_1 &= -u_1 \left(u \frac{d\alpha}{d\omega} + v \frac{d\beta}{d\omega}\right) - v_1 w_1, \end{aligned}$$

En différentiant ces formules on obtiendra :

$$(13)\quad \begin{cases} dx_1 = v_1\, d\omega \left[w + u \left(\alpha + \dfrac{d^2\alpha}{d\omega^2} \right) + v \left(\beta + \dfrac{d^2\beta}{d\omega^2} \right) \right], \\ dy_1 = -\, u_1\, d\omega \left[w + u \left(\alpha + \dfrac{d^2\alpha}{d\omega^2} \right) + v \left(\beta + \dfrac{d^2\beta}{d\omega^2} \right) \right], \end{cases}$$

ω étant toujours considéré comme la variable indépendante.

Ces relations conduisent à différentes conséquences que je me contenterai d'énoncer ; car elles sont bien connues et se démontrent aussi facilement par la Géométrie que par l'Analyse.

Si à un instant donné on considère toutes les droites de la figure mobile, celles qui touchent leur enveloppe en un point de rebroussement passent par un point A *dont les coordonnées par rapport aux axes mobiles sont :*

$$x = \alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2} \qquad y = \beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}.$$

Le centre de courbure de l'enveloppe d'une droite quelconque est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A *sur la normale à l'enveloppe.*

Le point A *est défini géométriquement par la propriété suivante : le cercle ayant pour diamètre la droite qui joint le point* A *au centre instantané, cercle qui est le lieu des points de rebroussement des enveloppes de droites, est symétrique par rapport à ce centre instantané du cercle lieu des points dont les trajectoires ont une inflexion.*

Nous nous bornerons à développer ce qui concerne les arcs des courbes enveloppes. On aura, en employant les formules (13) :

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = \left[w + u \left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2} \right) + v \left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right) \right] d\omega,$$

ds désignant la différentielle de l'arc de l'enveloppe, et par suite si l'on veut avoir l'arc de l'enveloppe quand la figure mobile passe de la position P_0 à la position P_1, on trouvera :

$$s = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left[w + u \left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2} \right) + v \left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right) \right] d\omega,$$

et par conséquent :

$$s = w.\theta + u \int_{\omega_0}^{\omega_1} \left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2} \right) d\omega + v \left(\int_{\omega_0}^{\omega_1} (\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right) d\omega,$$

θ désignant toujours la différence $\omega_1 - \omega_0$. Posons :

$$(14) \qquad \int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)d\omega = \xi''\theta \qquad \int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)d\omega = \eta''\theta.$$

L'expression de l'arc deviendra :

$$(15) \qquad s = \theta\,(w + u\xi'' + v\eta''),$$

et de là résulte le théorème suivant :

Si l'on considère la figure mobile dans deux quelconques de ses positions P_0, P_1, ***l'arc enveloppé par une droite quelconque de cette figure dans le passage de la première position à la seconde est égal à l'angle dont la figure a tourné multiplié par la distance à cette droite d'un point déterminé*** (ξ'', η'') ***de la figure mobile*** (¹).

Il est bon de remarquer pour les applications qu'ici la différentielle de l'arc a un signe et que ce signe change lorsqu'on passe par un point de rebroussement de l'enveloppe.

En vertu des formules qui déterminent ξ'', η'' on trouvera :

$$\theta\xi'' = \int_{\omega_0}^{\omega_1}\xi\,d\omega - \eta_1 + \eta_0,$$

$$\theta\eta'' = \int_{\omega_0}^{\omega_1}\eta\,d\omega + \xi_1 - \xi_0.$$

ou, en se rappelant les formules (7) :

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} \xi'' &= \xi' - \frac{\eta_1 - \eta_0}{\theta}, \\ \eta'' &= \eta' + \frac{\xi_1 - \xi_0}{\theta}, \end{aligned}\right.$$

On voit donc que le point (ξ'', η'') dépend encore du centre de gravité des courbures de Steiner. Du reste les formules précédentes permettent de le construire immédiatement. Soient A_0, A_1 les deux positions initiale et finale du centre instantané de la figure mobile et soient C'

(¹) Dans un article intéressant inséré au ***Bulletin de la Société Philomathique*** (1869, p. 12) M. Ribaucour a énoncé la même proposition sous la forme suivante : lorsqu'une figure plane se meut d'une manière quelconque dans son plan, toutes les droites de cette figure enveloppent des courbes dont les longueurs sont les mêmes que si le système avait tourné du même angle autour d'un certain point de la figure.

le centre de gravité des courbures, C'' le point à construire. Pour avoir la direction et le sens de $C'C''$ il faudra faire tourner $A_0 A_1$ de 90° dans le sens des rotations de Ox vers Oy. De plus la grandeur de $C'C''$ est donnée par la formule :

$$C'C'' = \frac{A_0 A_1}{\theta}.$$

On voit en particulier que si le mouvement est périodique et si l'on en considère une période entière, A_0 coïncide avec A_1 et le point cherché est le centre de gravité des courbures.

On peut obtenir ici des propositions analogues à celles de MM. Holditch et Leudersdorf. Considérons d'abord trois droites concourantes de la figure mobile D, D_1, D_2 représentées par les équations :

$$\begin{aligned} y \cos \varphi - x \sin \varphi &= 0, \\ y \cos \varphi_1 - x \sin \varphi_1 &= 0, \\ y \cos \varphi_2 - x \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

On aura pour les arcs s, s_1, s_2 des enveloppes de ces trois droites les formules :

$$\begin{aligned} s &= \theta\,(\eta' \cos \varphi - \xi' \sin \varphi), \\ s_1 &= \theta\,(\eta' \cos \varphi_1 - \xi' \sin \varphi_1), \\ s_2 &= \theta\,(\eta' \cos \varphi_2 - \xi' \sin \varphi_2), \end{aligned}$$

ce qui donne, en éliminant ξ', η' :

$$(12)\, s + (20)\, s_1 + (01)\, s_2 = 0. \tag{17}$$

(ik) désignant le sinus de l'angle des droites D_i, D_k.

Cette formule, si simple, permet de résoudre le curieux problème suivant :

Étant données deux courbes (C), (C_1), *trouver une nouvelle courbe* (C_2) *dont l'arc soit égal à la somme des arcs des deux courbes.*

En effet, menons à (C), (C_1) respectivement deux tangentes D, D_1 faisant un angle constant A et considérons la bissectrice D_2 de l'angle formé par D, D_1. Les trois droites D, D_1, D_2 constituent une figure invariable et si l'on applique la formule précédente on aura :

$$2 s_2 \cos \frac{A}{2} = s + s_1,$$

en supprimant le facteur commun $\sin \frac{A}{2}$. L'arc s_2 de la courbe enveloppée par la bissectrice est donc proportionnel à $s + s_1$. Une courbe semblable aura donc un arc exactement égal à $s + s_1$ [1].

Enfin, si nous considérons trois droites D, D_1, D_2 formant un triangle et représentées par les équations :

$$x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i - p_i = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

on aura, en employant la formule (15) et en éliminant ξ', η' des trois équations obtenues :

$$\begin{vmatrix} s & \cos\varphi & \sin\varphi \\ s_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ s_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix} = -\theta \begin{vmatrix} p & \cos\varphi & \sin\varphi \\ p_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ p_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Il n'est pas difficile de transformer cette formule et de voir qu'on peut l'écrire :

$$as + bs_1 + cs_2 = 2\theta S,$$

a, b, c désignant les longueurs des trois côtés et S la surface du triangle formé par les trois droites D, D_1, D_2.

Nous laisserons au lecteur le soin de faire des applications, et pour terminer ce qui se rapporte aux enveloppes de droites nous chercherons les aires de ces enveloppes. Les formules qui donnent x_1, y_1, dx_1, dy_1 nous conduisent à la relation suivante :

$$x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = (w + u\alpha + v\beta)\left[w + u\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)\right],$$

et l'on a par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_{\omega_0}^{\omega_1}(x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1) &= w^2\theta + uw\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(2\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)d\omega \\ &+ vw\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(2\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)d\omega + u^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\alpha^2 + \alpha\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)d\omega \\ &+ v^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\beta^2 + \beta\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)d\omega + uv\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\alpha\beta + \alpha\frac{d^2\beta}{d\omega^2} + \beta\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)d\omega.\end{aligned}$$

[1] Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XIV, 2e série) M. Fouret a fait connaître un cas particulier de cette construction, celui où l'angle constant a ses deux côtés tangents à une même courbe.

L'aire de l'enveloppe sera donc de la forme :

$$w^2 \frac{\theta}{2} + Auw + A'vw + Bu^2 + B'v^2 + Cuv,$$

et par conséquent les droites dont les enveloppes ont une aire constante K satisfont à l'équation :

$$(19) \quad w^2 \frac{\theta}{2} + Auw + A'vw + Bu^2 + B'v^2 + Cuv = K = K(u^2 + v^2).$$

On reconnaît l'équation tangentielle d'une série de coniques homofocales. Ainsi :

Si l'on considère les droites de la figure mobile, telles que le rayon vecteur joignant un point fixe du plan à leur point de contact avec leur enveloppe décrit une aire donnée quand la figure mobile passe de la position P_0 *à la position* P_1, *ces droites enveloppent une conique de la figure mobile dont les foyers demeurent fixes quand la valeur constante de l'aire donnée varie.*

Dans le cas où le mouvement est périodique, si on applique le théorème précédent à une période entière, on reconnaît que le centre de la conique coïncide avec le centre de gravité des courbures de la roulette mobile.

Quelques-unes des propositions précédentes s'étendent soit au mouvement d'une figure invariable sur la sphère, soit aux déplacements dans l'espace. Mais pour cette généralisation je renverrai au travail que j'ai publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* en 1878 (t. II, 2e série, p. 339 et suivantes).

NOTE IX

SUR UN NOUVEL APPAREIL A LIGNE DROITE DE M. HART.

Dans les *Proceedings of the London Mathematical Society* (vol. VIII, p. 288), M. Hart qui avait déjà trouvé un premier système articulé réalisant avec cinq tiges seulement la description mécanique de la ligne droite, a fait connaître une nouvelle solution du même problème dans laquelle il emploie le même nombre de tiges. Le nouvel appareil de M. Hart, tout à fait différent du premier, nous paraît offrir le plus grand intérêt. Récemment M. Kempe l'a retrouvé, en étudiant une question plus générale sur laquelle nous avons eu l'occasion de revenir (¹). Nous nous proposons ici d'exposer la méthode de M. Hart, en la généralisant quelque peu et en mettant en évidence quelques conséquences très simples des résultats obtenus par l'auteur.

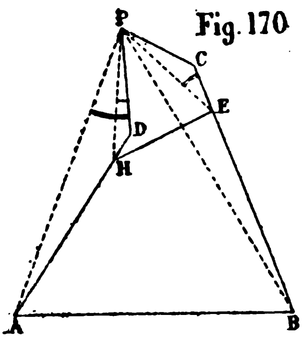


Fig. 170

Soit ABCDP un pentagone articulé fixé par les deux sommets A et B. Le mouvement de cette figure dépend de deux paramètres; par exemple, on peut prendre arbitrairement les angles en A et en B; nous achèverons de déterminer ce mouvement par la condition que les angles en C et en D soient égaux. Nous allons voir que cette condition, qu'il serait difficile de réaliser mécaniquement, peut être remplacée par celle-ci, que deux points H, E convenablement choisis sur AD et

(¹) A.-B. Kempe, *On conjugate Four-piece Linkages* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. IX, p. 133, n° 132).
G. Darboux, *Recherches sur un système articulé* (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. III, p. 151-187).

sur BC soient maintenus à une distance constante et par conséquent reliés par une tige de longueur convenable.

En effet, déterminons un point H sur AD, par la condition :

$$\frac{DH}{PD} = \frac{PC}{CB}.$$

Les deux triangles PHD, PCB, ayant les angles C et D égaux par hypothèse, seront semblables; on aura donc :

$$(1) \qquad \frac{DH}{PC} = \frac{PD}{CB} = \frac{PH}{PB},$$

$$(2) \qquad \text{angle HPD} = \text{angle PBC}.$$

De même, déterminons un point E sur BC par la condition :

$$\frac{CE}{PC} = \frac{PD}{AD}.$$

Les deux triangles PDA, PCE seront semblables, et l'on aura :

$$(3) \qquad \frac{CE}{PD} = \frac{PC}{AD} = \frac{PE}{AP},$$

$$(4) \qquad \text{angle APD} = \text{angle PEC}.$$

Je vais démontrer que les points H et E sont à une distance invariable. Mais auparavant je désignerai, pour plus de netteté, par des lettres les différents segments de la figure. Posons :

$$AB = a, \quad AH = b, \quad HD = b', \quad DP = \beta,$$
$$BE = c, \quad EC = c', \quad CP = \gamma.$$

Les égalités (1), (3) nous donnent, entre ces lignes, les relations :

$$\beta\gamma = b'(c + c') = c'(b + b'),$$

d'où l'on déduit :

$$bc' - cb' = 0.$$

Posons :

$$(5) \qquad b' = bk, \quad c' = ck,$$

on aura :

$$(6) \qquad \beta\gamma = bck(1 + k),$$

et des égalités (1) et (3) on déduira aussi :

$$\frac{PH}{PB} = \frac{\beta}{c(1+k)}, \quad \frac{PE}{PA} = \frac{\gamma}{b(1+k)}. \tag{7}$$

Cela posé, en vertu des équations (2), (4), les angles APH, BPE sont égaux comme différences d'angles égaux, et, par conséquent, les angles en P des deux triangles HPE, APB sont aussi égaux. On aura donc, en désignant par P leur valeur commune :

$$\overline{HE}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PE}^2 - 2\overline{PH}.\overline{PE} \cos P.$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2\overline{PA}.\overline{PB} \cos P.$$

En éliminant le cosinus inconnu et remplaçant PH, PE par leurs valeurs tirées des équations (7), on trouve ;

$$\overline{HE}^2 = \frac{c\gamma - b\beta}{b^2c^2(1+k)}\left(c\gamma\,\overline{PA}^2 - b\beta\,\overline{PB}^2\right) + \frac{a^2k}{1+k}.$$

On a d'ailleurs, dans les deux triangles APD, BCP :

$$\overline{AP}^2 = \beta^2 + b^2(1+k)^2 - 2b(1+k)\beta\cos\theta,$$
$$\overline{BP}^2 = \gamma^2 + c^2(1+k)^2 - 2c(1+k)\gamma\cos\theta,$$

θ désignant la valeur commune des angles C et D. Éliminant θ, on trouve :

$$c\gamma\,\overline{PA}^2 - b\beta\,\overline{PB}^2 = (b\gamma - c\beta)\,bc\,(1+k), \tag{8}$$

et, par conséquent, on a :

$$\overline{HE}^2 = \frac{(c\gamma - b\beta)(b\gamma - c\beta)}{bc(1+k)} + \frac{a^2k}{1+k};$$

HE est donc constant, comme il fallait le démontrer, et, en désignant par d sa valeur, on a :

$$k(a^2 - d^2) = d^2 + \frac{(c\gamma - b\beta)(c\beta - b\gamma)}{bc}. \tag{9}$$

Ainsi, l'on pourra produire ce mouvement particulier du pentagone articulé, dans lequel les angles C et D variables sont constamment égaux, en réunissant les deux points H et E par une tige de la longueur d définie par l'équation précédente.

Mais alors l'équation (8) donnant une relation entre les distances du point P aux deux points fixes A et B, est l'équation du lieu du point P; ce lieu est, en général, un cercle ayant son centre sur la droite AB.

Si, dans l'équation (8), on remplace PA, PB en fonction de PH, PE, on est conduit à l'équation :

$$b\beta\,\overline{PE}^2 - c\gamma\,\overline{PH}^2 = bck\,(b\gamma - c\beta),$$

et l'on voit que, si au lieu de fixer A et B on fixait H et E, le lieu de P serait encore un cercle ayant son centre sur HE. En étudiant plus complètement cette figure, on retrouverait les systèmes de deux quadrilatères semblables considérés par M. Kempe dans le Mémoire que nous avons déjà cité.

Si l'on a :

$$c\gamma = b\beta, \tag{10}$$

l'équation (8) deviendra :

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \frac{b}{\gamma}(1 + k)(b\gamma - c\beta),$$

et le lieu du point P deviendra une droite perpendiculaire à AB. C'est le résultat signalé d'abord par M. Hart. On a alors :

$$\left\{\begin{array}{lll} k = \dfrac{d^2}{a^2 - d^2}, & & \\ \beta = \dfrac{acd}{a^2 - d^2}, & b' = \dfrac{bd^2}{a^2 - d^2}, & b + b' = \dfrac{ba^2}{a^2 - d^2}, \\ \gamma = \dfrac{abd}{a^2 - d^2}, & c' = \dfrac{cd^2}{a^2 - d^2}, & c + c' = \dfrac{ca^2}{a^2 - d^2}. \end{array}\right. \tag{11}$$

Cette remarquable solution laisse donc entièrement arbitraires les quatre côtés du quadrilatère articulé ABEH. Le lieu du point P est alors défini par l'équation :

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{a^2 - d^2}.$$

On voit que, si la théorie est un peu longue, le résultat est extrêmement simple.

Dans cet appareil, le mouvement de PD est celui d'une droite dont un point D décrit un cercle pendant qu'un autre point P décrit une droite. Cherchons si l'on peut disposer des dimensions des différentes tiges de telle manière que tous les points de cette droite décrivent des ellipses. Il faudra pour cela : 1° que la droite décrite par le point P passe en A ; 2° que PD = AD.

En exprimant ces deux conditions, on trouve :

$$c^2 - b^2 = a^2 - d^2, \quad ba = cd,$$

et par conséquent :

$$b = d, \quad c = a.$$

Alors l'appareil offre la disposition indiquée sur la figure 171. On a :

$$AH = HE, \quad AB = BE, \quad AD = DP, \quad PC = CE.$$

Si l'on prolonge DP d'une longueur DQ = DP, le point Q décrit la droite AB. Le mouvement de la barre PQ est donc celui d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires. Tous les points invariablement liés à PQ et d'où l'on voit PQ sous un angle droit décriront des droites passant par A. Les points de PQ décrivent des ellipses.

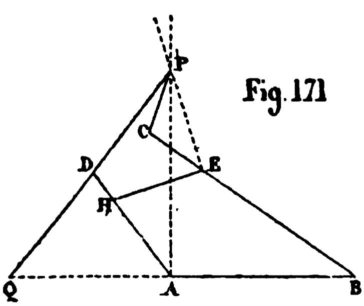


Fig. 171

Les collections de la Faculté des Sciences contiennent un très beau modèle de cet appareil, exécuté par M. Bréguet. Ce modèle est disposé de telle manière, qu'au lieu de fixer les points A, B on peut fixer les points P et D. Alors tous les points de la droite AB, devenue mobile, décrivent des limaçons de Pascal.

L'ellipse et le limaçon de Pascal sont donc des courbes que l'on peut décrire, comme la ligne droite, par l'emploi de cinq tiges seulement.

Voilà une première conséquence des recheches de M. Hart. En voici une seconde que nous nous contenterons d'indiquer en quelques mots.

Considérons l'hexagone articulé ABDB'A'CA, dont les points A, B sont fixes. Le mouvement de cette figure dépend de trois paramètres, Achevons de le déterminer par la condition que les angles C, D soient égaux et que A'B' soit parallèle à AB. Je dis que ces deux conditions peuvent être remplacées par celle-ci, que deux points N et P convenablement choisis sur AC, BD soient à une distance invariable ainsi que deux points N', P' pris sur A'C, B'D.

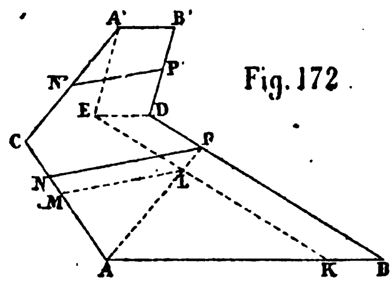


Fig. 172.

En effet, menons, par A', A'E égale et parallèle à B'D, puis EK égale et parallèle à DB. La figure A'EKAC sera un pentagone identique à celui dont nous avons étudié le mouvement, les angles en C et en E étant égaux. Il y aura donc deux points M et L sur EK et AC qui seront à une distance invariable. Si l'on prolonge AL jusqu'en P, et qu'on mène NP parallèle à AL, le quadrilatère NPBA sera homothétique au quadrilatère AKLM. On aura donc :

$$\frac{ML}{NP} = \frac{AK}{AB} = \frac{AB - A'B'}{AB};$$

NP sera donc constant comme LM.

Par raison de symétrie, ou en répétant le même raisonnement, on reconnaît qu'il y a de même deux points N', P' sur A'C, B'D qui demeurent à une distance invariable, en sorte que le mouvement de l'hexagone sera déterminé si l'on réunit par des tiges de longueurs convenables ces couples de points (N, P), (N', P').

Du reste, si les proportions des côtés de l'hexagone et par conséquent celles des côtés du pentagone A'CAKE sont convenablement choisies, c'est à dire si l'on a :

$$\overline{A'C}.\overline{CA} = \overline{B'D}.\overline{DB},$$

le point A' décrira une droite perpendiculaire à AB; il en sera de même

de tous les points de A′B′. On aura donc réalisé le mouvement d'une droite demeurant toujours horizontale pendant que tous ses points décrivent des verticales (1).

Il est clair que, si l'on réunit dans l'espace deux appareils égaux de ce genre, situés dans deux plans verticaux faisant un angle quelconque et reliés par leurs points A′ de telle manière que les deux points A′ décrivent la même droite, les deux droites A′B′ détermineront un plan horizontal dont tous les points décriront des verticales. On pourra poser une table sur ces droites, et l'on aura ainsi la disposition, la plus simple connue, permettant de réaliser un mouvement parallèle dont les applications sont évidemment très variées.

(1) Voici quelles sont les dimensions des différentes tiges. Posons :

$$CA = \beta, \quad DB = \gamma, \quad AB = a,$$
$$CA' = \beta', \quad DB' = \gamma', \quad A'B' = a'.$$

On devra avoir :

$$\beta\beta' = \gamma\gamma',$$

et l'on trouvera :

$$AN = \frac{a}{a - a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\gamma}, \quad BP = \frac{a}{a - a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\beta}, \quad NP = a\,\frac{\beta'}{\gamma},$$
$$A'N' = \frac{a'}{a - a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\gamma'}, \quad B'P' = \frac{a'}{a - a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\beta'}, \quad N'P' = a'\,\frac{\beta}{\gamma'}.$$

Au reste, les deux quadrilatères ABPN, A′B′P′N′ sont semblables, les côtés homologues étant AB et N′P′, A′B′ et N′P A′N′ et BP, AN et B′P′. Les lignes NP, N′P sont parallèles, comme AB et A′B′. La théorie de cette figure peut également se rattacher aux belles recherches de M. Kempe.

NOTE X

SUR LA BRACHYSTOCHRONE RELATIVE A UN POINT MATÉRIEL PESANT.

On considère deux points A et B, A étant le plus haut. Si l'on imagine une cycloïde ayant l'horizontale CD pour base et passant par les points A et B, le temps que mettra un point matériel pesant, placé primitivement en A avec la même vitesse que s'il était tombé librement d'un point de CD, pour aller au point B, sera moindre quand on assujettira le mobile à parcourir la cycloïde AHB que lorsqu'on l'assujettira à parcourir toute autre ligne AKB située dans le plan vertical des points A et B.

Menons la normale en un point M de la cycloïde. Cette normale enveloppe, comme on sait, une autre cycloïde qu'elle touche en un point Q tel que $PQ = PM$. Si l'on désigne par ω l'angle CPM et par a le rayon du cercle générateur de la cycloïde on a, comme on sait :

$$PM = PQ = 2a \sin \omega.$$

Supposons que l'on définisse la courbe AKB par la longueur $\rho = PN$ portée sur la normale à la cycloïde à partir du point P. Cette longueur essentiellement positive pourra être plus grande ou plus petite que PM.

Menons la normale à la cycloïde en un point M' infiniment voisin de M, et soit N' le point où elle vient couper la courbe AKB. La vitesse que le point matériel pesant aura en N dans son mouvement sur la courbe AKB aura évidemment pour expression :

$$\sqrt{2g.\mathrm{NL}} = \sqrt{2g.\rho \sin \omega},$$

NL étant la perpendiculaire abaissée sur la droite CD.

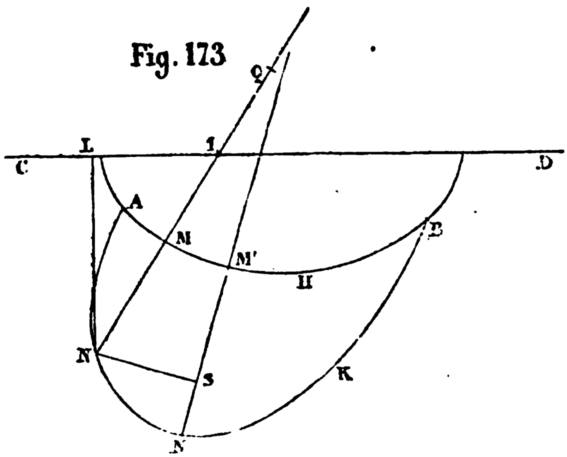
Par conséquent, le temps que le mobile mettra à aller du point A au point B par la courbe AKB sera exprimé par l'intégrale :

$$\int_{A}^{B} \frac{NN'}{\sqrt{2g\,\rho \sin \omega}}.$$

Il nous reste à évaluer NN'.

Abaissons du point N la perpendiculaire NS sur la normale M' N'

Fig. 173



dans le triangle rectangle NN' S, on aura évidemment en négligeant des infiniment petits du second ordre :

$$NN' = \frac{NS}{\sin i},$$

i étant l'angle que fait MN avec la tangente en N à la courbe AKB.

D'autre part, comme les normales en M et en M' font un angle égal à $d\omega$ et se coupent en un point très voisin de Q, on a au degré d'approximation déjà indiqué :

$$NS = (\rho + PQ)\, d\omega = (\rho + 2a \sin \omega)\, d\omega,$$

et l'on obtient alors, pour expression définitive du temps par la courbe :

$$\int_{A}^{B} \frac{\rho + 2a \sin \omega}{\sqrt{2g \,.\, \rho \sin \omega}} \frac{d\omega}{\sin i},$$

Il s'agit d'établir que cette intégrale est plus grande que celle qui correspond à la cycloïde AHB. Pour cela nous commencerons par supprimer $\sin i$, dans chaque élément; cette suppression ne peut que diminuer l'intégrale, qui deviendra :

$$\int_{A}^{B} \frac{\rho + 2a \sin \omega}{\sqrt{2g\,\rho \sin \omega}}\, d\omega = \int_{A}^{B} \left(\sqrt{\rho} + \frac{2a \sin \omega}{\sqrt{\rho}}\right) \frac{d\omega}{\sqrt{2g \sin \omega}}.$$

Sous cette forme nous voyons immédiatement que chaque élément de l'intégrale, considéré comme fonction de ρ, est la somme de deux quantités dont le produit est constant. Chacun des éléments, et par suite l'intégrale totale, prendra la plus petite valeur possible quand on aura :

$$\rho = 2a \sin \omega.$$

Or, les deux hypothèses :

$$\sin i = 1, \quad \rho = 2a \sin \omega,$$

correspondent au mouvement par la cycloïde AHB. La proposition que nous avions en vue est donc établie. Dans les conditions que nous avons indiquées, la cycloïde est la *brachystochrone* ou courbe de plus vite descente pour le point matériel pesant.

La propriété précédente subsisterait encore si, au lieu de supposer la courbe AKB plane et située dans le plan de la cycloïde, on prenait une courbe quelconque allant du point A au point B. Pour l'établir, on projette la courbe considérée sur le plan de la cycloïde et l'on reconnaît immédiatement que le temps mis par le mobile à parcourir la projection est moindre que celui qu'il met à parcourir la courbe dans l'espace. En effet, les éléments correspondants des deux courbes sont parcourus avec la même vitesse, mais l'élément de la projection est toujours inférieur ou égal à celui de la courbe dans l'espace.

La belle démonstration qui précède est due à M. O. Bonnet.

NOTE XI

SUR UNE LOI PARTICULIÈRE DE LA FORCE SIGNALÉE PAR JACOBI.

Dans la théorie des forces centrales, on s'occupe surtout du cas où la force dépend seulement de la distance du point mobile au centre attirant. L'illustre Jacobi a signalé une loi plus compliquée de la force qui est donnée par la formule :

$$R = \frac{f(\omega)}{r^2},$$

r désignant la distance au pôle et ω l'angle polaire. On voit que si l'on suppose la fonction $f(\omega)$ remplacée par une constante, on retrouve la loi de Newton. Jacobi a montré que l'on peut toujours trouver les équations finies du mouvement du mobile pour toutes les formes possibles de la fonction $f(\omega)$.

Écrivons, en effet, les équations différentielles du mouvement. Les deux composantes de la force parallèles aux axes sont :

$$\frac{f(\omega)}{r^2}\cos\omega, \quad \frac{f(\omega)}{r^2}\sin\omega.$$

On aura donc, pour les équations différentielles :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f(\omega)}{r^2}\cos\omega, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{f(\omega)}{r^2}\sin\omega.$$

On peut évidemment adjoindre à ces deux équations l'intégrale des aires :

$$(2) \qquad r^2\,d\omega = C\,dt,$$

qui en est la conséquence.

Mettons la première des équations (1) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{f(\omega)}{r^2}\cos\omega,$$

et remplaçons-y $\frac{1}{r^2}$ par sa valeur tirée de l'équation (2); elle deviendra :

$$d\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{f(\omega)}{C}\cos\omega\,d\omega.$$

L'intégration peut donc s'effectuer immédiatement et nous donne :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{C}\int f(\omega)\cos\omega\,d\omega. \tag{3}$$

On aura de même :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}\int f(\omega)\sin\omega\,d\omega. \tag{4}$$

Ces deux équations jointes à l'intégrale des aires :

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \tag{5}$$

donnent la solution complète du problème. Si l'on porte, par exemple, les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ tirées des équations (3) et (4) dans l'équation (5) on aura :

$$x\int f(\omega)\sin\omega - y\int f(\omega)\cos\omega = C^2. \tag{6}$$

C'est l'équation en termes finis de la trajectoire. Si l'on y remplace x et y en fonction de r et de ω, elle devient :

$$\frac{C^2}{r} = \cos\omega\int f(\omega)\sin\omega\,d\omega - \sin\omega\int f(\omega)\cos\omega\,d\omega. \tag{7}$$

En portant ensuite la valeur de r fournie par cette équation dans la formule (2), on aura le temps par une quadrature.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de la loi de la nature et faisons :

$$f(\omega) = -\mu,$$

μ désignant une constante. On aura :

$$\int f(\omega) \sin \omega \, d\omega = \mu \cos \omega + \alpha = \mu \frac{x}{r} + \alpha,$$

$$\int f(\omega) \cos \omega \, d\omega = - \mu \sin \omega - \beta = - \mu \frac{y}{r} - \beta;$$

α et β étant les deux constantes introduites par l'intégration. L'équation de la trajectoire deviendra ici :

(8) $$\mu r + \alpha x + \beta y = C^2.$$

Elle représente, on le voit, une conique rapportée à son foyer et dont l'excentricité a pour valeur :

(9) $$e = \frac{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{\mu}.$$

Les formules (3) et (4) nous donnent ici :

(10) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= - \frac{\mu}{C} \frac{y}{r} - \frac{\beta}{C}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\mu}{C} \frac{x}{r} + \frac{\alpha}{C}, \end{aligned} \right.$$

et l'on en déduit pour la vitesse du mobile, en tenant compte de l'équation (8) :

(11) $$v^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \mu^2}{C^2}.$$

La constante h des forces vives a donc pour expression :

$$h = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - \mu^2}{C^2},$$

ou, en vertu de l'équation (9) :

(12) $$h = \frac{\mu^2}{C^2} (e^2 - 1) = v^2 - \frac{2\mu}{r}.$$

On voit donc que la trajectoire sera une ellipse si la constante des forces vives est négative, une parabole si cette constante est nulle, une hyperbole si elle est positive.

Dans le cas où μ est négatif, la force est répulsive; la constante des forces vives étant essentiellement positive, la trajectoire est toujours une hyperbole.

Revenons au cas général où $f(\omega)$ est une fonction quelconque. Si dans la formule (7) on met en évidence les constantes arbitraires introduites par l'intégration, on voit que l'équation de la trajectoire sera de la forme :

$$\frac{1}{r} = a\,\theta(\omega) + b\cos\omega + c\sin\omega, \tag{13}$$

où $\theta(\omega)$ est une fonction parfaitement déterminée de ω et où a, b, c sont les trois constantes arbitraires qui doivent figurer dans l'équation de la trajectoire. De là résulte la proposition suivante :

Si l'on a trouvé une solution particulière quelconque du problème dans laquelle la trajectoire est définie par l'équation :

$$\frac{1}{r} = \varphi(\omega),$$

on aura immédiatement l'équation de la trajectoire la plus générale avec trois constantes arbitraires, par la formule :

$$\frac{1}{r} = \alpha\,\varphi(\omega) + \beta\cos\omega + \gamma\sin\omega.$$

Par conséquent, si la première trajectoire est algébrique, il en est de même de toutes les autres qui sont des courbes homologiques à la première.

Cette remarque a quelque intérêt parce qu'elle montre qu'il existe des lois de la force pouvant faire décrire à un mobile des trajectoires qui seront toutes algébriques et d'un degré déterminé, quelles que soient les conditions initiales du mouvement.

Supposons en effet, étant donnée une courbe quelconque (C), qu'on la fasse parcourir par un mobile de telle manière que l'accélération soit dirigée vers un point fixe O que nous prendrons pour pôle. On peut toujours donner à la force qui détermine ce mouvement une expression de la forme :

$$\frac{f(\omega)}{r^2}.$$

Réciproquement, si l'on cherche le mouvement le plus général produit par l'action de cette force, comme on connaît déjà une trajectoire particulière, la courbe (C), on peut conclure de notre proposition que la trajectoire la plus générale sera une courbe homologique à (C), O étant le centre d'homologie. On voit donc que si (C) est algébrique et de degré déterminé, on aura une loi de la force dans laquelle toutes les trajectoires seront des courbes algébriques, d'un même degré qui peut d'ailleurs être quelconque, à savoir le degré de (C).

NOTE XII

SUR LES LOIS DE KEPLER.

Dans deux articles *sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Kepler le principe de l'attraction* insérés au tome 84 des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* M. Joseph Bertrand a traité différentes questions très intéressantes relatives au mouvement des planètes autour du Soleil.

Dans le premier, inséré à la page 671, cet illustre géomètre a d'abord démontré que si Kepler n'avait déduit de l'observation qu'une seule de ses lois : *les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers,* on aurait pu, de ce seul résultat érigé en principe général, conclure que la force qui les gouverne est dirigée vers le Soleil et inversement proportionnelle au carré de la distance. Il a ensuite proposé pp. 673 et 731 le problème suivant :

En sachant que les planètes décrivent des sections coniques et sans rien supposer de plus, trouver l'expression des composantes de la force qui les sollicite, en fonction des coordonnées de son point d'application.

M. Bertrand a d'abord établi, par des considérations géométriques fort simples, que la force est nécessairement dirigée vers un centre fixe ou parallèle à une droite fixe. La dernière hypothèse est incompatible avec une orbite fermée; il faut donc nécessairement admettre la première et supposer que la direction de la force va passer par un centre fixe. On est ainsi amené à résoudre un problème incomparablement plus facile que le précédent et dont voici l'énoncé :

Trouver l'expression de la force qui, dirigée vers un centre fixe, fait décrire une section conique, quelles que soient les conditions initiales du mouvement.

J'ai donné (pp. 760 et 936 du même tome) une solution directe du problème ainsi transformé, et c'est cette solution que je me propose de développer ici. Mais auparavant, j'emprunterai à un beau travail de M. Halphen sur le même sujet (p. 939 du même tome), l'énoncé de la proposition suivante :

Si une force, dépendant seulement de la position de son point d'application, fait décrire à ce point, quelles que soient les circonstances initiales, une trajectoire plane, cette force passe par un point fixe ou est parallèle à une droite fixe.

Cette proposition a été démontrée analytiquement par M. Halphen; mais il est facile d'en donner aussi une démonstration géométrique.

Soit en effet P le plan de l'une quelconque des trajectoires (C), je dis que pour tout point m de P la force est située dans ce plan.

Cette proposition est évidente pour tous les points de la trajectoire (C). Si maintenant on place le mobile en un de ces points, en lui attribuant une vitesse initiale assujettie à la seule condition d'être dans le plan P et de ne pas avoir la direction de la force en ce point, on aura par hypothèse des trajectoires toutes planes. Leur plan qui doit contenir à la fois la vitesse initiale et la direction initiale de la force coïncidera évidemment avec le plan P. Ainsi ce dernier plan contiendra non seulement la trajectoire (C), mais une foule d'autres trajectoires émanant des différents points de (C) et remplissant au moins une bande du plan de part et d'autre de (C). En répétant le raisonnement pour les points à la limite de cette bande, on finira évidemment par atteindre tous les points du plan P et il est ainsi démontré que pour tous ces points la direction de la force sera dans le plan.

Ce résultat étant admis, il est très aisé d'établir que la force passe par un point fixe ou est parallèle à une droite fixe. Pour cela, je vais montrer que les forces relatives à deux points quelconques m, m' de l'espace sont dans un même plan.

Cela est évident, si la direction de l'une des forces coïncide avec la droite mm'. Si aucune des forces ne coïncide avec cette droite, faisons passer un plan par mm' et la direction de la force en m. Ce plan sera celui d'une trajectoire; il suffit pour l'obtenir de placer le mobile en m et de le lancer dans la direction mm'. Donc, d'après une proposition établie, il contiendra la direction de la force relative à tous ses points et en particulier au point m'. Donc, les forces relatives aux deux points m, m' sont bien toujours dans un même plan.

Soient maintenant a, b deux points fixes et m un point variable. Si les forces relatives à a et à b vont concourir en un point O, la force relative au point m étant dans un même plan avec chacune des précédentes devra aller passer au point fixe O. Si au contraire les deux forces relatives aux points a et b sont parallèles, la force relative au point m leur sera parallèle et par conséquent aura une direction fixe. La proposition de M. Halphen est donc complètement établie.

Il suit de cette proposition qu'un observateur placé sur le Soleil et qui verrait toutes les planètes dessiner, dans leur mouvement, des grands cercles de la sphère céleste, pourrait conclure de cette seule remarque que la force qui agit sur les planètes est dirigée vers le Soleil.

Dans le problème, tel que l'avait énoncé tout d'abord M. Bertrand, on suppose que le point matériel décrit toujours, non seulement une courbe plane, mais une ellipse. Seulement, on considère toutes les trajectoires comme étant décrites dans le même plan. On a donc à résoudre une question de dynamique plane ; mais, ici encore, on peut obtenir la même conclusion que précédemment et démontrer que la force est centrale ou parallèle à une direction fixe.

Si la trajectoire du mobile dans le plan considéré est toujours une conique, on démontrera aisément, comme le fait M. Bertrand, que cette conique peut dégénérer en une droite. En effet, si la vitesse initiale est dans la direction de la force, le rayon de courbure de la trajectoire au point initial sera nécessairement infini, et par conséquent la conique devant avoir un rayon de courbure infini sera nécessairement une ligne droite.

Par chaque point du plan, il passera une de ces droites et comme elles ne peuvent se couper qu'en des points où la direction de la force soit indéterminée, elles seront toutes concourantes ou parallèles. En effet, s'il en était autrement, chacune des droites serait coupée par toutes les autres en une infinité de points où la direction de la force serait indéterminée, ce qui est évidemment impossible.

Tel est le raisonnement de M. Bertrand. J'aborde maintenant la solution du problème auquel nous sommes ramenés.

Sachant qu'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale décrit toujours une conique, on demande de trouver l'expression de cette force.

On connaît déjà deux solutions de ce problème : le cas où la force est proportionnelle à la distance et celui où elle est en raison inverse du carré de la distance. Mais dans ce qui va suivre, nous ne supposerons pas qu'il y ait une fonction des forces, c'est à dire nous admettrons que la force agissant sur un point peut dépendre, en même temps que de la distance du point au centre fixe, de l'angle que fait la direction de la force avec une droite fixe du plan.

Rapportons le mouvement à des coordonnées polaires et prenons pour pôle le centre attirant ou origine de la force. Soient r et ω les coordonnées du mobile, C la constante des aires, F la grandeur de la force. L'expression de F sera, comme on sait :

$$(1) \qquad F = \frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\omega^2}\right].$$

La trajectoire étant une conique, nous aurons, en écartant le cas, du reste très facile à traiter, où la conique passe au pôle, une équation de la forme :

$$(2) \qquad \frac{1}{r} = a\cos\omega + b\sin\omega + \sqrt{A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H};$$

a, b, A, B, H étant les cinq paramètres qui définissent la conique.
On déduit de l'équation (2), par un calcul des plus simples :

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\omega^2} = \frac{H^2 - A^2 - B^2}{(A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H)^{\frac{3}{2}}}.$$

ce qui donne :

$$(3) \qquad F = \frac{C^2(H^2 - A^2 - B^2)}{r^2(A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H)^{\frac{3}{2}}},$$

Cette expression relativement simple de F permet d'apercevoir immédiatement deux solutions du problème :

1° Posons :

$$(4) \qquad A = \theta^2 m, \quad B = \theta^2 n, \quad H = \theta^2 h, \quad C^2(H^2 - A^2 - B^2) = \mu\theta^3.$$

Nous aurons pour expression de la force :

$$(5) \qquad F = \frac{\mu}{r^2 (m \cos 2\omega + n \sin 2\omega + h)^{\frac{3}{2}}},$$

et pour équation de la trajectoire :

$$(6) \qquad \frac{1}{r} = a \cos \omega + b \sin \omega + \theta \sqrt{m \cos 2\omega + n \sin 2\omega + h}.$$

Cette formule, contenant trois constantes arbitraires a, b, θ ne figurant pas dans l'expression de la force, est donc *l'équation la plus générale de la trajectoire* quand la force est représentée par l'équation (5).

Les coniques représentées par l'équation (6) ont une propriété géométrique remarquable et qui suffit à définir le système qu'elles forment. Lorsque a, b, θ varient, elles demeurent tangentes à deux droites fixes réelles ou imaginaires passant par l'origine des coordonnées.

Si l'on veut que la force ne dépende pas de ω, il faudra supposer $m = n = 0$, ce qui conduira à la loi de Newton.

2° En tenant compte de l'équation de la trajectoire, l'expression de la force peut aussi s'écrire :

$$(7) \qquad F = \frac{C^2 (H^2 - A^2 - B^2)}{r^2 \left(\frac{1}{r} - a \cos \omega - b \sin \omega\right)^3}.$$

Il suit de cette nouvelle expression de la force une deuxième solution du problème proposé. On voit, en effet, qu'en adoptant la trajectoire définie par l'équation :

$$(8) \qquad \frac{1}{r} = a \cos \omega + b \sin \omega + \sqrt{A \cos 2\omega + B \sin 2\omega + H},$$

et en la supposant parcourue de telle manière que la constante des aires ait la valeur déterminée par la formule :

$$(9) \qquad C^2 (H^2 - A^2 - B^2) = \mu,$$

on aura pour expression de la force :

$$(10) \qquad F = \frac{\mu}{r^2 \left(\frac{1}{r} - a \cos \omega - b \sin \omega\right)^3}.$$

L'équation (8) contenant trois constantes A, B, H qui ne figurent pas dans l'expression de la force, représente la trajectoire la plus générale qu'un point matériel puisse décrire sous l'action de la force, et cette trajectoire étant encore une conique, on obtient une deuxième loi de la force satisfaisant à toutes les conditions posées.

Les coniques représentées par l'équation (8) lorsque A, B, H varient, sont caractérisées par cette propriété que la polaire de l'origine des coordonnées par rapport à l'une quelconque d'entre elles est une droite fixe dont l'équation est

$$\frac{1}{r} = a \cos \omega + b \sin \omega;$$

si a et b sont nuls, la loi de la force devient :

$$F = \mu r.$$

Les coniques représentées par l'équation (8) ont l'origine pour centre et l'on retombe sur un résultat connu :

Les deux lois de la force que nous venons de trouver, sont les seules pour lesquelles la trajectoire soit une conique. Pour le montrer, nous reprendrons l'équation générale d'une conique :

$$\frac{1}{r} = a \cos \omega + b \sin \omega + \sqrt{A \cos 2\omega + B \sin 2\omega + H}, \tag{11}$$

et nous supposerons que cette équation représente l'une des trajectoires. Alors a, b, A, B, H seront cinq fonctions inconnues des trois constantes arbitraires qu'introduit l'intégration complète du problème, constantes arbitraires que, pour fixer les idées, nous désignerons par α, β, γ. L'expression de la force agissant sur le mobile est donnée par la formule :

$$F = \frac{C^2 (H^2 - A^2 - B^2)}{r^2 (A \cos 2\omega + B \sin 2\omega + H)^{\frac{3}{2}}}; \tag{12}$$

C désignant la constante des aires, ou plus simplement :

$$F = \frac{1}{r^2} \left[\frac{K}{A \cos 2\omega + B \sin 2\omega + H} \right]^{\frac{3}{2}}; \tag{13}$$

K désignant comme C une fonction inconnue des trois constantes arbitraires.

Cela posé, faisons varier les constantes α, β, γ de telle manière que la conique trajectoire passe toujours par un point déterminé (r, ω). On aura en différentiant l'équation (11) dans cette hypothèse :

$$(14) \quad \cos\omega\, da + \sin\omega\, db + \frac{\cos 2\omega\, dA + \sin 2\omega\, dB + dH}{2\sqrt{A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H}} = 0.$$

D'ailleurs, la force devant demeurer constante pour le même point, on aura dans les mêmes conditions $dF = 0$, c'est à dire :

$$(15) \qquad \cos 2\omega\, d\cdot\left(\frac{A}{K}\right) + \sin 2\omega\, d\cdot\left(\frac{B}{K}\right) + d\left(\frac{H}{K}\right) = 0,$$

et cette relation différentielle doit être vérifiée pour chaque système de valeurs de ω, α, β, γ toutes les fois que l'équation (14) le sera.

Or, cette condition ne peut être remplie que de deux manières différentes :

1° L'équation (15) peut avoir lieu, quel que soit ω, si l'on a :

$$d\left(\frac{A}{K}\right) = d\left(\frac{B}{K}\right) = d\left(\frac{H}{K}\right) = 0.$$

Alors $\frac{A}{K}$, $\frac{B}{K}$, $\frac{C}{K}$ sont des constantes indépendantes de α, β, γ et nous sommes conduits à la première loi trouvée, exprimée par la formule (5) ;

2° L'équation (15) n'est pas identiquement vérifiée ; dans ce cas, elle doit être une conséquence de la formule (14) et cela pour toutes les valeurs de ω.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que les équations (14) et (15) aient la même forme et que les termes en $\sin\omega$, $\cos\omega$ qui ne figurent pas dans l'équation (15) disparaissent de la relation (14). On doit donc avoir :

$$da = 0, \quad db = 0,$$

et par conséquent a et b doivent être des constantes, ne dépendant pas des arbitraires α, β, γ. L'expression de la force devenant alors :

$$F = \frac{C^2 (H^2 - A^2 - B^2)}{r^2 \left(\frac{1}{r} - a\cos\omega - b\sin\omega\right)^3},$$

et le dénominateur ne contenant plus α, β, γ, il faut qu'il en soit de même du numérateur. On obtient ainsi la seconde loi de la force, donnée par la formule (10) [1].

Les deux lois auxquelles nous avons été conduits directement sont donc les seules qui fournissent une solution de notre problème. Si on les exprime en fonction des coordonnées x et y, elles prennent la forme :

$$(5)' \qquad F = \frac{\mu r}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(10)' \qquad F = \frac{\mu . r}{(ax + by + c)^2}.$$

En se reportant à des mouvements s'accomplissant dans l'espace, on reconnaîtra aisément que les deux lois de la force centrale représentées

[1] On peut rendre le raisonnement plus précis de la manière suivante :

Toutes les fois que l'on a entre les différentielles $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ la relation exprimée par la formule (14), l'équation (15) doit aussi être vérifiée. Il faut donc que l'on ait, pour toutes les valeurs possibles de ces différentielles :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos 2\omega\, d\left(\frac{A}{K}\right) + \sin 2\omega\, d\left(\frac{B}{K}\right) + d\left(\frac{H}{K}\right) \\ &\quad = \lambda \left[\cos \omega\, da + \sin \omega\, db + \frac{\cos 2\omega\, dA + \sin 2\omega\, dB + dH}{2\sqrt{A \cos 2\omega + B \sin 2\omega + H}}\right], \end{aligned} \right.$$

λ étant un facteur fini qui peut dépendre de ω.

Changeons dans cette équation ω en $\omega + \pi$. Elle deviendra :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos 2\omega\, d\left(\frac{A}{K}\right) + \sin 2\omega\, d\left(\frac{B}{K}\right) + d\left(\frac{H}{K}\right) \\ &\quad = \lambda' \left[- \cos \omega\, da - \sin \omega\, db + \frac{\cos 2\omega\, dA + \sin 2\omega\, dB + dH}{2\sqrt{A \cos 2\omega + B \sin 2\omega + H}}\right]. \end{aligned} \right.$$

En égalant les seconds membres des équations (1) et (2), on aura donc :

$$(\lambda + \lambda')\, d\,(a \cos \omega + b \sin \omega) = (\lambda' - \lambda)\, d.\, \sqrt{A \cos 2\omega + B \sin 2\omega + H}.$$

Si da et db n'étaient pas nuls, λ serait différent de λ', et en vertu de l'équation précédente, le radical $\sqrt{A \cos 2\omega + B \sin 2\omega + H}$ dépendrait seulement des deux variables $a \cos \omega + b \sin \omega$ et ω. Par conséquent l'équation de la conique trajectoire contiendrait au plus deux constantes arbitraires a et b, ce qui est évidemment impossible.

On est donc conduit à supposer :

$$da = db = 0,$$

et l'on obtient alors la seconde loi de la force, correspondante à l'hypothèse dans laquelle l'équation (15) n'a pas lieu identiquement.

par les formules :

$$(a)\qquad F = \frac{\mu r}{(ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(b)\qquad F = \frac{\mu r}{(ax + by + cz + d)^3},$$

sont les seules qui puissent se réduire aux formes précédentes pour les mouvements s'effectuant dans chacun des plans passant par l'origine de la force et par conséquent les seules pour lesquelles la trajectoire soit toujours une conique.

Le cas que nous avons écarté où les trajectoires seraient des coniques passant à l'origine ne donnerait qu'une loi de la force comprise comme cas particulier dans la formule (b) et correspondante à l'hypothèse $d = 0$.

NOTE XIII

SUR LE TAUTOCHRONISME QUAND ON A ÉGARD AU FROTTEMENT.

Nous supposons qu'un point matériel, soumis à l'action de forces qui dépendent uniquement de la position de ce point, soit assujetti à se mouvoir sur une courbe plane et nous nous proposons de former l'équation différentielle des courbes pour lesquelles le mouvement de ce point jouit de la propriété du tautochronisme quand on a égard au frottement. Nous suivrons pour cela la belle méthode donnée par M. Puiseux (*Journal de Liouville*, t. IX, 1re série, p. 418).

Lorsqu'un point se meut sur une courbe non polie on sait que, pour tenir compte du frottement, il faut ajouter aux forces connues qui agissent sur le mobile une force nouvelle dirigée en sens contraire de la vitesse et égale à la pression normale que le mobile exerce sur la courbe, multipliée par le coefficient f du frottement. L'application de cette règle générale va nous donner l'équation différentielle du mouvement.

Nous déterminerons la position du point mobile M sur la courbe par la longueur s de l'arc OM compté à partir d'un point fixe O de la courbe, cette longueur étant prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$ suivant qu'elle sera portée dans un sens déterminé ou dans le sens opposé. Si l'on attribue également un sens déterminé à la normale en O à la courbe, la loi de continuité fera connaître le sens de la normale en M. Alors la force qui agit sur le mobile sera parfaitement déterminée, si l'on connaît pour chaque valeur de s sa composante tangentielle T et sa composante normale N, en grandeur et en signe. Donnons de même un signe au rayon de courbure; convenons de le regarder comme positif, si, C étant le centre de courbure relatif au point M, le sens de CM est celui des longueurs positives comptées sur la normale en M ; et comme négatif, dans le cas contraire. Alors la pression du mobile sur la courbe sera à chaque instant :

$$N + \frac{v^2}{\rho},$$

v désignant la vitesse du mobile et ρ le rayon de courbure. Si l'on suppose que la vitesse v soit positive, c'est à dire que le mouvement ait lieu dans le sens des arcs croissants, alors, d'après la règle que nous venons de rappeler, la force de frottement sera égale, en grandeur et en signe, à :

$$-f\left(N + \frac{v^2}{\rho}\right),$$

et l'équation différentielle du mouvement sera :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2}\right) = T - f\left(N + \frac{v^2}{\rho}\right). \tag{1}$$

Il faudrait changer f en $-f$ si le mouvement avait lieu en sens contraire.

T et N étant par hypothèse des fonctions de s, on voit que l'équation (1) est linéaire. Si l'on considère v^2 comme l'inconnue, son intégrale sera donc de la forme :

$$v^2 = C\,\varphi(s) + \psi(s),$$

C désignant la constante arbitraire et le temps sera donné par la quadrature :

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{C\,\varphi(s) + \psi(s)}}.$$

Cette intégrale coïncide, aux notations près, avec celle de M. Puiseux. Il suffirait de poser :

$$\frac{\psi(s)}{\varphi(s)} = -y, \quad \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}} = f'(y)\,dy,$$

pour la ramener à celle qui a été considérée à la page 319 de ce volume. En appliquant le résultat de M. Puiseux, nous voyons que le mouvement ne jouira de la propriété du tautochronisme que dans le cas où l'intégrale qui donne le temps pourra être ramenée à la forme :

$$(2) \qquad t = a \int \frac{P'\,ds}{\sqrt{A - P^2}},$$

P désignant une certaine fonction de s, P' sa dérivée et A la constante arbitraire. On trouvera alors, en intégrant entre les limites O et $\sqrt{A}$ pour P :

$$(3) \qquad T = a \int_0^{\sqrt{A}} \frac{dP}{\sqrt{A - P^2}} = \frac{\pi a}{2}.$$

En différentiant la formule (2), on aura pour l'expression de la vitesse :

$$(4) \qquad a^2 v^2 = \frac{A - P^2}{P'^2}.$$

Si l'on considère d'ailleurs le temps qui s'écoule entre le moment où la vitesse est nulle $(P = \sqrt{A})$ et celui où le mobile arrive au point pour lequel on a $P = 0$, on voit, d'après la formule (3), que ce temps est indépendant de A ; et par conséquent le mouvement jouit bien de la propriété du tautochronisme.

Le *point de tautochronisme* $P = 0$ est caractérisé, comme il fallait s'y attendre, par une propriété mécanique spéciale ; c'est celui pour lequel il y aurait équilibre, si le mobile y était placé sans vitesse initiale ; le frottement ayant d'ailleurs la même valeur que dans le cas où il y a mouvement.

Exprimons que la valeur (4) de v^2 satisfait, quelle que soit la constante A, à l'équation différentielle (1) ; nous aurons les deux équations :

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{P'^2}\right) = -\dfrac{2f}{\rho P'^2}, \\ \dfrac{P}{a^2 P'} = fN - T. \end{cases}$$

Pour intégrer la première, introduisons comme nouvelle variable l'angle ω que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x. On aura comme on sait :

$$\frac{ds}{\rho} = d\omega,$$

et la première des équations (3) nous donnera :

$$P' = e^{f\omega}.$$

On reconnaîtra aisément qu'il est inutile d'introduire une constante arbitraire :

Portons cette valeur de P' dans la seconde équation (5), nous aurons :

$$P = a^2 e^{f\omega} (fN - T),$$

et en différentiant les deux membres de cette équation :

$$(6) \qquad \frac{\rho}{a^2} = f(fN - T) + \frac{d}{d\omega}(fN - T).$$

C'est l'équation différentielle de la courbe cherchée que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$\frac{ds}{a^2} e^{f\omega} = d\left[e^{f\omega}(fN - T)\right].$$

Nous allons faire deux applications. Supposons d'abord que la force qui agit sur le mobile soit la pesanteur et que l'axe des y ait été pris vertical ; on aura :

$$N = g \cos \omega \qquad T = -g \sin \omega,$$

et l'équation (6) nous donnera :

$$(7) \qquad \frac{\rho}{a^2} = g(1 + f^2) \cos \omega.$$

Cette équation est de la même forme que dans le cas où il n'y a pas frottement. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

La cycloïde est la seule courbe plane qui jouisse de la propriété du tautochronisme par rapport au mouvement d'un point pesant, quand on tient compte du frottement.

L'équation (7) ne contenant que le carré de f, le tautochronisme aura lieu quand le mouvement se fera dans les deux sens. Il nous semble intéressant d'étudier les diverses circonstances de ce mouvement.

Considérons une cycloïde dont la base AB soit horizontale, la convexité de la cycloïde étant dirigée vers le bas. Soient M, M′ les deux points, placés sur une même horizontale, où la normale à la cycloïde fait avec la verticale un angle égal à l'angle de frottement. La cycloïde se trouve partagée en trois arcs AM, MM′, MB′. Si le point pesant est placé sans vitesse initiale en un point quelconque de l'arc MM′, il y demeurera en équilibre, car son poids fait avec la normale à la courbe un angle inférieur ou au plus égal à l'angle de frottement. Si le point pesant est placé sans vitesse en un point quelconque m de AM, il se mettra en mouvement; le point de tautochronisme étant M, il parviendra toujours à ce point dans un même temps T, puis il s'en écartera et sa vitesse redeviendra nulle au bout d'un second intervalle de temps égal au premier. Si à ce moment il est encore sur l'arc MM′, il demeurera indéfiniment au repos. Si au contraire il a dépassé le point M′ et se trouve sur l'arc M′B en un point m' évidemment moins élevé que m, il prendra un mouvement en sens contraire dans lequel le point de tautochronisme *ne sera plus le point* M, *mais le point* M′ ; enfin au bout d'un nombre plus ou moins grand d'oscillations de durée égale, il finira par s'arrêter entre M et M′.

D'une manière plus générale, étudions le cas où le point est soumis à une force centrale. Si l'on considère la courbe sur laquelle le mobile est assujetti à se mouvoir comme l'enveloppe de la droite :

$$x \sin \omega - y \cos \omega = \psi(\omega),$$

on trouvera aisément qu'en appelant r la distance à l'origine des coordonnées, placée au centre attirant, et en désignant par $r\varphi(r)$ la loi de la force on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \varphi(r)\,\psi'(\omega), & r &= \sqrt{\psi^2 + \psi'^2}, \\ \mathrm{N} &= \varphi(r)\,\psi(\omega), & \rho &= \psi(\omega) + \psi''(\omega). \end{aligned}$$

L'équation (6) deviendra :

$$\left[\frac{1}{a^2} + \varphi(r) - \frac{\varphi'\psi'}{r}(f\psi - \psi')\right](\psi + \psi'') = \psi\,(f^2 + 1)\,\varphi(r).$$

Après avoir remplacé r par sa valeur, on aura une équation du second ordre en ψ dont l'intégration paraît difficile.

Mais si l'attraction est proportionnelle à la distance, $\varphi(r)$ sera une constante b et l'équation deviendra :

$$\left(\frac{1}{a^2} + b\right)(\psi + \psi'') = (1 + f^2)\, b.\psi,$$

ou :

$$\psi''\left(b + \frac{1}{a^2}\right) = \psi\left(bf^2 - \frac{1}{a^2}\right).$$

Cette équation est encore de même forme que dans le cas où il n'y a pas frottement. Donc :

Les seules courbes planes qui soient tautochrones pour des forces centrales proportionnelles à la distance lorsqu'on tient compte du frottement, sont celles qui ont été étudiées par M. Puiseux (1) *et qui sont tautochrones dans le cas où il n'y a pas de frottement.*

Ici encore l'équation différentielle ne contient que le carré du coefficient de frottement, ce qui donnera des conséquences analogues à celles que nous avons développées pour la cycloïde.

En terminant, nous signalerons un élégant article de M. Haton de La Goupillière (*Journal de Liouville*, t. XIII, 2e série, p. 304) dans lequel il est démontré que l'épicycloïde et les autres courbes trouvées par M. Puiseux sont les seules pour lesquelles la loi de la force soit comprise dans la formule générale de Lagrange relative au tautochronisme. Mais, comme le fait bien justement remarquer M. Haton de La Goupillière, la formule de Lagrange, qui contient des fonctions arbitraires d'une seule variable, est bien loin de donner la solution générale du problème du tautochronisme, et il résulte des remarques de M. Bertrand que la formule qui doit remplacer celle de Lagrange contiendra dans son expression une fonction arbitraire de deux variables. La recherche que nous avons entreprise n'était donc pas inutile.

Nous ferons d'ailleurs remarquer que la méthode suivie pourrait encore s'appliquer sans modification, si l'on introduisait une résistance du milieu, proportionnelle au carré de la vitesse.

(1) Voir la page 326 de ce volume.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

	Pages.
Principe de l'inertie	2
Définition de la force	2
Définition de la mécanique	2
Données expérimentales nécessaires à la mécanique	3
Divisions de la mécanique	3
Cinématique	3
Dynamique, son but	4
Statique	4
Mécanique rationnelle, mécanique appliquée	5

PREMIÈRE PARTIE

STATIQUE

CHAPITRE PREMIER

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES.

Conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un même point. Théorème des moments.

Notions de la résultante	8
Définition de la résultante	9
Composantes	9
Translation du point d'application	10
Des forces appliquées à un même point ont toujours une résultante	12
Composition des forces agissant suivant la même droite	13

Composition de deux forces appliquées à un même point.

La résultante est dirigée dans le plan et dans l'angle des deux forces	14
1er Lemme	15
2me Lemme	16
Relations entre la résultante et les composantes	18
Décomposition d'une force en deux autres de directions données	19
Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point	20

de trois forces. — Parallélipipède des forces............
ilibre de trois forces concourantes......................
omposition d'une force en trois autres de directions donn
ul de la résultante d'un nombre quelconque de forces a
nême point..
litions d'équilibre de plusieurs forces concourantes......

Théorème des moments.

uition...
ression du moment d'une force par rapport à l'origine
omposantes de la force et des coordonnées de son point d'

CHAPITRE II

COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

Théorème des moments. — Détermination des coordon des forces parallèles. — Équilibre des forces par

position de deux forces parallèles et de même sens.........
onstration directe......................................
position de deux forces parallèles et de sens contraires....
où les forces de sens contraires sont égales...............
position d'un nombre quelconque de forces parallèles.....
rème des moments.....................................
le deux forces parallèles et de sens contraires............
où les forces parallèles sont dirigées dans deux sens différe
éralisation du théorème des moments.......................
ierches des coordonnées du centre des forces parallèles.....

CHAPITRE III

CENTRES DE GRAVITÉ.

idérations générales......................................
re de gravité d'un corps homogène.........................
re de gravité d'un corps non homogène....................
re de gravité d'une ligne..................................

Centres de gravité des lignes.

ie droite..
ie brisée..
our d'un triangle.......................................
de cercle...
re de gravité d'un arc de cycloïde.........................

Surfaces.

llélogramme..

Pages.
[illegible] 52
[illegible] 53
[illegible] 53
[illegible] $x = \alpha$, $x = \beta$ et [illegible] 54
[illegible] 55
[illegible] 56
[illegible] 57
[illegible] 57
[illegible] 58

[illegible] des centres de gravité d'un volume.

[illegible] 58
[illegible] 59
[illegible] 59
[illegible] 59

Théorème de Guldin.

[illegible] 61
[illegible] 61
[illegible] théorème de Guldin 62
[illegible] 63
[illegible] 64
[illegible] 65
[illegible] centre de gravité d'un système de points matériels [illegible] 65

CHAPITRE IV

DES COUPLES.

[illegible] 68
[illegible] 69
[illegible] situés dans un même plan ou dans des plans [illegible] 71
[illegible] dans des plans quelconques 72
[illegible] les théorèmes qui concernent la composition des [illegible] 74
[illegible] des couples 77

CHAPITRE V

[illegible] DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE.

Étude géométrique.

[illegible] 78
[illegible] 79

Expressions analytiques des conditions d'équilibre, et de la résultante lorsqu'elle existe.

Pages.

Équilibre des forces parallèles situées dans le même plan.................. 81
Équilibre des forces parallèles non situées dans un même plan............ 82

Développement des équations de l'équilibre dans le cas général.

Recherche de la résultante unique dans le cas où elle existe............... 90

Théorie des moments. — Identité avec les couples.

Interprétation des trois dernières équations de l'équilibre................. 92
Équilibre de trois forces.. 96
Équilibre de quatre forces.. 97
Somme des moments des forces par rapport aux droites qui passent en un même point.. 97
Théorème.. 98
Théorème.. 99
Définition.. 99
Théorème sur les systèmes de forces équivalentes......................

Axe central.

Théorème.. 102
Théorème.. 103
Disposition de tous les axes autour de l'axe central........................ 104
Cas où il y a une résultante unique.. 105
Cas où la résultante est nulle.. 105
Détermination analytique du couple minimum et de l'axe central.......... 105
Quelques propriétés des systèmes de deux forces auxquelles on peut toujours ramener un système de forces données.............................. 107

CHAPITRE VI

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME QUI N'EST PAS LIBRE.

Équilibre d'un corps gêné.. 111
Équilibre d'un point assujetti à rester sur une surface fixe................. 112
Équilibre d'un point assujetti à rester sur une courbe donnée.............. 113
Autre manière d'avoir égard à la résistance des surfaces et des lignes...... 114
1° Cas d'une force.. 114
2° Cas d'une courbe.. 115

Équilibre d'un corps gêné.

1° Le corps présente un point fixe.. 116
2° Cas d'un axe fixe.. 117
Équilibre d'un corps qui s'appuie sur un plan fixe sur lequel il peut glisser librement.. 120

Pages.
Explication d'un paradoxe 123
De l'équilibre de deux corps solides qui se touchent en un point donné et qui s'appuient l'un contre l'autre, chacun de ces corps étant sollicité par des forces données 125
Tableau résumé des conditions d'équilibre d'un corps solide dans les différents cas 126

CHAPITRE VII

POLYGONE FUNICULAIRE. — COURBE FUNICULAIRE. — THÉORIE DE LA CHAINETTE. — COURBE DES PONTS SUSPENDUS.

Polygone funiculaire.

Équilibre du polygone funiculaire 127
Polygone de Varignon 129

Courbes funiculaires. 130

De la tension en un point du fil 131
Équations de l'équilibre du fil 133
Transformation des équations 139
Cas où toutes les forces sont normales au fil 140

Théorie de la chaînette. — Courbe des ponts suspendus. 142

Détermination des constantes et construction de la courbe 145
Remarque sur le centre de gravité de la chaînette 147
Courbe des ponts suspendus 147
Détermination des constantes 149

DEUXIÈME PARTIE

CINÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL. — VITESSE.

Objet de la Cinématique 153
Mouvement d'un point 154
Mouvement rectiligne uniforme. — Vitesse 154
Vitesse dans un mouvement quelconque 154

Pages.
Projection du mouvement sur un plan fixe 156
Cas des coordonnées polaires 157
Méthode de Roberval pour mener les tangentes aux courbes 158
Exemples : 1° Tangentes à l'ellipse 159
— 2° Tangentes à la conchoïde 160

CHAPITRE II

ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

Accélération dans le mouvement rectiligne 161
Accélération dans un mouvement quelconque 162
Projection de l'accélération sur un axe 164
Autre manière de considérer l'accélération totale 166

CHAPITRE III

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

Mouvement de translation 168
Mouvement de rotation 168
Mouvement d'une figure plane dans son plan 169
1er Exemple 170
2e Exemple 171
Théorème 171
Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe 172
Mouvement le plus général d'un corps solide 173
Axe central 174
Mouvement continu le plus général d'un corps solide 175

CHAPITRE IV

MOUVEMENT COMPOSÉ ET MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT.

Composition des vitesses. — Théorème 178
Composition des accélérations 179
Théorème de Coriolis 181

CHAPITRE V

COMPOSITION DES MOUVEMENTS D'UN CORPS SOLIDE.

Composition de deux mouvements élémentaires d'un corps solide.

Composition de deux translations 186
Composition d'une translation et d'une rotation 186

Pages
Composition de deux rotations autour de deux axes parallèles.............. 188
Composition de deux rotations autour de deux axes concourants. — Axe représentatif d'une rotation.. 189
Composition de deux rotations autour d'axes non situés dans le même plan. 191

Composition de deux mouvements quelconques d'un Corps solide.

Remarque importante sur la décomposition d'un mouvement élémentaire quelconque d'un corps solide.. 192

TROISIÈME PARTIE

DYNAMIQUE
DU POINT MATÉRIEL

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

Principe de l'inertie de la matière.. 194
Principe des mouvements relatifs. — Théorème........................... 195
Application à la pesanteur.. 197
Théorème II.. 198
Lemme 198
Définition de la masse... 199

CHAPITRE II

MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

Théorème.. 202

Application de ce qui précède. — Exemples de mouvement rectiligne.

Mouvement vertical des corps pesants dans le vide........................ 206
Mouvement vertical d'un point matériel pesant dans un milieu résistant.... 207
Le mobile est lancé de bas en haut dans le même milieu.................. 211

Problèmes sur le mouvement rectiligne, dans lesquels la force motrice est une fonction de la distance à une origine fixe.

Mouvement rectiligne d'un point matériel attiré proportionnellement à la distance par un centre fixe situé sur la droite trajectoire................ 216

Pages.
Représentation géométrique 217
Mouvement rectiligne d'un point repoussé proportionnellement à la distance par un centre fixe situé sur sa trajectoire 219
Discussion.. 219
Mouvement rectiligne d'un point matériel attiré par l'origine par une force proportionnelle à la puissance $2n$ de la distance...................... 220
Mouvement rectiligne d'un point matériel, attiré par deux centres fixes situés sur la trajectoire en raison inverse du carré de la distance 221
Discussion.. 223

CHAPITRE III

MOUVEMENT CURVILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

Considérations préliminaires.

Théorème I 227
Théorème II... 227

Mouvement curviligne d'un point matériel.

Théorème préliminaire.. 228
Théorème fondamental.. 229
Remarque 230
Équations générales du mouvement d'un point matériel.................. 231
Mouvement dans un plan.. 233
Réciproque du problème 234
Force tangentielle. — Force centripète 234

CHAPITRE IV

MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE ET DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

Mouvement des projectiles dans le vide................................. 236
Courbe décrite.. 237
Amplitude du jet.. 237
Ordonnée du sommet... 238
Direction du tir... 238
Temps nécessaire pour atteindre un point donné......................... 240
Du mouvement des projectiles dans un milieu résistant.................. 240
Cas où $a = 0$... 244
Discussion.. 245
Mouvement des projectiles en supposant la résistance proportionnelle à la simple vitesse.. 250
Équation de la trajectoire.. 252
Amplitude du jet.. 253

CHAPITRE V

SUR LES INTÉGRALES D'UN PROBLÈME DE DYNAMIQUE.

Pages.
Théorème des forces vives. — Intégrale des forces vives 258
Propriétés des surfaces de niveau 260
Extension de l'intégrale des forces vives 266
Exemples de cas où la fonction des forces existe 267
Du travail 271
Relation entre le travail et la force vive 272

CHAPITRE VI

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE COURBE FIXE.

Exemple 279
Détermination de la pression que le mobile exerce sur la courbe 279

CHAPITRE VII

APPLICATIONS A QUELQUES QUESTIONS RELATIVES AU MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR UNE COURBE DONNÉE.

Mouvement d'un point matériel pesant sur une courbe donnée 281
Théorème 283
Cas d'exception 286
Problème 287
Problème 290
Problème 292

CHAPITRE VIII

MOUVEMENT DU PENDULE SIMPLE DANS LE VIDE ET DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

Pendule simple dans le vide 295
Cas des oscillations très petites 297
Cas des oscillations quelconques 297
Intégration par les fonctions elliptiques 301
Remarque 303

Mouvement d'un pendule simple dans un milieu résistant.

La résistance est proportionnelle à la vitesse 304
Résistance proportionnelle au carré de la vitesse 307
Cas des amplitudes très petites 309

CHAPITRE IX

MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR LA CYCLOÏDE. — COURBES TAUTOCHRONES. — BRACHYSTOCHRONE.

	Pages.
Mouvement d'un point pesant sur la cycloïde	314
Pendule cycloïdal	317
Démonstration de M. Puiseux	318
Cas particulier	324
De la brachystochrone	326
Application	334

CHAPITRE X

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SOUMIS A UNE FORCE CENTRALE.

Théorème	337
Réciproque	339
Expression de la vitesse dans le mouvement produit par une force centrale	340
Expression de la constante c à l'aide des conditions initiales du mouvement	340
Expression de la force accélératrice	341

Application de la théorie des forces centrales au mouvement des planètes.

Lois de Kepler	343
Détermination des trois constantes c, e et α à l'aide des données initiales θ_0, r_0, v_0, η_0	347
Orbites des comètes	349
Vérification du principe de la gravitation universelle	351

Applications de la théorie des forces centrales.

1re Question	356
Exemple	356
Applications	357
2me Question	358
Application	358
3me Question	359
2me Méthode	360
Autre application	365
Détermination des constantes	366
Cas de la répulsion	367

NOTES

DE Mʀ DARBOUX

		Pages.
NOTE I.	— Sur la composition des forces en statique	371
II.	— Relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité	378
III.	— Sur le centre de gravité de certains volumes	383
IV.	— Sur le système de quatre forces en équilibre	389
V.	— Sur l'équilibre astatique	391
VI.	— Sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde	395
VII.	— Problème de mécanique	399
VIII.	— Sur le mouvement d'une figure invariable	402
IX.	— Sur un nouvel appareil à ligne droite de M. Hart	417
X.	— Sur la brachystochrone relative à un point matériel pesant	424
XI.	— Sur une loi particulière de la force signalée par Jacobi	427
XII.	— Sur les lois de Kepler	432
XIII.	— Sur le tautochronisme en ayant égard au frottement	441

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.